NOVI

ARITMETICA

ELEMENTI

D' ARITMETICA

DI

GIOVANNI NOVI

Professore di Meccanica nel R. Liceo Militare di Firenze.

FIRENZE.
FELICE LE MONNIER.

1859.

AVVERTENZA.

Questi *Elementi* sono destinati a coloro che studiano per la prima volta Aritmetica e contengono le sole nozioni fondamentali della scienza, sceverate da tutte quelle dottrine, le quali, comecchè importantissime, torna utile in un primo studio lasciare da parte. Queste nozioni vengono esposte nel modo più elementare che per noi si è saputo, senza però scompagnarle da quel rigore scientifico che è condizione essenziale di qualunque opera di matematica, elementare o superiore. Dove ci è sembrato che una dimostrazione rigorosa dovesse riuscire ardua all'intelligenza di coloro cui quest'operetta è specialmente indirizzata, abbiamo stimato meglio tacere che dare idee incompiute o poco esatte. Siamo stati chiari, o a dir meglio ci siamo ingegnati di essere, cansando accuratamente quella prolissità, che da taluni è riputata chiarezza, ma dai più e dai migliori è considerata come poco acconcia alla buona disciplina degli studi.

Delle applicazioni abbiamo accennato quelle solamente, la cui pratica giova conoscere fin dal principio. La teorica delle proporzioni abbiamo esposta come preliminare indispensabile allo studio della Geometria. Ciascun capitolo è terminato da esercitazioni elementari, alla cui soluzione è bene volgano la mente per tempo i giovani;

ELEMENTI D'ARITMETICA.

CAPITOLO I.

NOZIONI PRELIMINARI.

1. Si chiama *numero* la riunione di più oggetti simili; *unità* uno di questi oggetti. Così, per esempio, una compagnia di soldati è un numero, e ciascun soldato è una unità; gli alberi che limitano un viale formano un numero, e ciascun albero è una unità.

L'Aritmetica è la scienza dei numeri; ed ha per oggetto principale le *operazioni* che si possono eseguire sui numeri e il cui insieme costituisce il *calcolo*.

2. Per fare uso dei numeri bisogna saperli nominare e scrivere; diciamo prima del modo di nominarli, quindi ci occuperemo del modo di scriverli.

3. I primi numeri hanno ricevuto nomi indipendenti gli uni dagli altri; e sono:

uno, due, tre, quattro, cinque, sei, sette,
otto, nove, dieci.

Ciascuno di essi si ottiene aggiungendo una unità al precedente. Questi numeri sono sufficienti per formare un numero qualunque.

Per fissare le idee, supponiamo di voler contare i gettoni contenuti in una scatola. Prendiamo i gettoni uno a uno e formiamone più gruppi, ciascuno dei quali contenga dieci gettoni, o una *diecina*; e supponiamo

che dopo aver formato un certo numero di gruppi di diecine, sia rimasto qualche gettone. Posto che i gruppi sieno in numero di otto e cinque i gettoni rimanenti, diremo che il numero di gettoni contenuto nella scatola è

OTTO *diecine e* CINQUE *unità.*

Se il numero di diecine ottenuto a questa guisa è maggiore di nove, formeremo dei nuovi gruppi ciascuno dei quali contenga dieci diecine o un centinaio. Supponiamo che questi gruppi sieno quattro e che i gettoni rimanenti, evidentemente minori di un *centinaio,* disposti come innanzi, dieno sette gruppi di diecine più tre gettoni; il numero di gettoni contenuto nella scatola è

QUATTRO *centinaia,* SETTE *diecine,* TRE *unità.*

Se il numero delle centinaia fosse maggiore di nove, le riuniremo dieci a dieci, nella stessa guisa, per formare *migliaia,* e così di seguito.

Da ciò che precede risulta che il nostro metodo consiste nel formare più ordini di unità, ciascuno dei quali è dieci volte maggiore del precedente; or ecco il quadro di queste unità.

Primo ordine. — Uno.		
Secondo ordine. — Dieci.	}	1ª CLASSE.
Terzo ordine. — Cento.		
Quarto ordine. — Mille.		
Quinto ordine. — Dieci mila. . .	}	2ª CLASSE.
Sesto ordine. — Cento mila. .		
Settimo ordine. — Un milione. .		
Ottavo ordine. — Dieci milioni.	}	3ª CLASSE.
Nono ordine. — Cento milioni.		

Decimo ordine.	— Un bilione. . .	4ª CLASSE.
Undecimo ordine.	— Dieci bilioni. .	
Duodecimo ordine.	— Cento bilioni.	
Tredicesimo ordine.	— Un trilione. .	5ª CLASSE.
Quattordicesimo ordine.	— Dieci trilioni.	
Quindicesimo ordine.	— Cento trilioni.	

. . . .

Osservando questo quadro si vede che gli ordini di unità sono stati disposti in classi di tre in tre. La prima classe è quella delle unità semplici, che si riuniscono per diecine e centinaia; la seconda è quella delle migliaia, le quali si riuniscono pure per diecine e centinaia; la terza è quella dei milioni, che vanno, al modo stesso, riuniti per diecine e centinaia, e così via. Dal che nasce che per la formazione delle classi, è necessaria una sola nuova parola per nominare il primo ordine di ciascuna classe; gli altri due s'indicano per via delle parole dieci e cento. Osserveremo ancora che ciascuna unità delle classi successive è mille volte maggiore della precedente, cioè che un migliaio contiene mille unità semplici, un milione mille migliaia, un bilione mille milioni, un trilione mille bilioni, ec.

4. A ciascun ordine di unità appartengono nove numeri come all'ordine delle unità semplici. Così le diecine possono essere una, due, tre, quattro, cinque, sei, sette, otto e nove; nè possono essere più di nove, perchè un numero composto di dieci diecine prende il nome di centinaio. Lo stesso vale per le centinaia, per le migliaia ec. Questi nove numeri si distinguono, per i vari ordini di unità, coi seguenti nomi:

Per le diecine,

dieci, venti, trenta, quaranta, cinquanta, sessanta, settanta, ottanta, novanta.

Per le centinaia,

cento, duecento, trecento, quattrocento, cinquecento, seicento, settecento, ottocento, novecento.

Per le migliaia,

mille, duemila, tremila, quattromila, cinquemila, seimila, settemila, ottomila, novemila.

Per le diecine di migliaia,

diecimila, ventimila, trentamila, quarantamila, cinquantamila, sessantamila, settantamila, ottantamila, novantamila.

Per le centinaia di migliaia,

centomila, duecentomila, trecentomila, quattrocentomila, cinquecentomila, seicentomila, settecentomila, ottocentomila, novecentomila.

Il metodo è lo stesso per gli altri ordini di unità.

5. Un numero compreso fra dieci e cento si enuncia indicando il maggior numero di diecine che contiene e aggiungendovi il nome del numero minore di dieci che lo completa. Così un numero che contiene quattro diecine e due unità, si enuncia: *quarantadue.*

È evidente che a questo modo si possono enunciare tutti i numeri minori di cento.

È utile però avvertire che per nominare taluni dei numeri compresi fra dieci e venti, si è deviato dalla regola precedente; così invece di dire:

dieci-uno, dieci-due, dieci-tre, dieci-quattro, dieci-cinque, dieci-sei, dieci-sette, dieci-otto, dieci-nove

Si dice:

undici, dodici, tredici, quattordici, quindici, sedici, diciassette, diciotto, diciannove.

Un numero maggiore di cento e minore di mille si enuncia indicando il maggior numero di centinaia che contiene e aggiungendovi il nome del numero evidentemente minore di cento, che lo completa. Così un numero che contiene cinque centinaia, sette diecine e due unità, si enuncia: *cinquecento settantadue.*

È chiaro che a questo modo possono enunciarsi tutti i numeri minori di mille.

Un numero compreso fra mille e un milione, si esprime enunciando quante migliaia contiene e unendovi il nome del numero inferiore a mille che lo completa. Così diremo: *settecento cinquantatremila novecento quarantasei.*

Per esprimere un numero compreso fra un milione e mille milioni, o un *bilione*, s'indica quanti milioni contiene questo numero e si aggiunge il nome del numero minore di un milione che lo completa. Così diremo: *trentacinque milioni, ottocento trentaduemila, trecento ventisette.*

Si può continuare così indefinitamente.

6. Per scrivere i numeri che abbiamo imparato ad enunciare potremmo fare uso della scrittura ordinaria. Per esempio si può scrivere

SETTE$^{\text{diecine di milioni}}$ TRE$^{\text{milioni}}$ CINQUE$^{\text{centinaia di migliaia}}$ OTTO$^{\text{diecine di migliaia}}$ QUATTRO$^{\text{migliaia}}$ NOVE$^{\text{centinaia}}$ DUE$^{\text{diecine}}$ SEI$^{\text{unità}}$.

Per rendere più spedita la scrittura, si è convenuto di rappresentare ciascuna delle parole uno, due, tre, quattro, cinque, sei, sette, otto, nove, di cui si fa uso continuo, con un segno o cifra particolare. Queste cifre sono

1 2 3 4 5 6 7 8 9.

Per mezzo di queste cifre il numero precedente si scrive

7 diecine di milioni 3 milioni 5 centinaia di migliaia 8 diecine di migliaia 4 migliaia 9 centinaia 2 diecine 6 unità.

Osserviamo adesso che la cifra 6, la prima a cominciare dalla destra, rappresenta unità del primo ordine, la cifra 2 che occupa il secondo posto rappresenta unità del secondo ordine, la cifra 9 che occupa il terzo posto rappresenta unità del terzo ordine; in breve, il posto di ciascuna cifra, a cominciare dalla destra indica l'ordine delle unità che rappresenta. Quindi è inutile scrivere il nome dell'ordine, ammesso che *una cifra posta a sinistra di un' altra rappresenti unità dieci volte maggiore.* Ciò posto il numero precedente si scrive

7 3 5 8 4 9 2 6.

7. Osservazione. Le cifre 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, non bastano a scrivere tutti i numeri. Infatti può darsi il caso che un numero composto di più cifre non contenga unità di una certa classe; per esempio il numero quattrocento e nove contiene quattro centinaia e nove unità semplici, senza diecine. Se questo numero si scrivesse 49 senz'altro, si leggerebbe quarantanove. Per conservare a ciascuna cifra il suo valore relativo si è immaginata la cifra, 0, che si pronunzia *zero.* Così il numero quattrocentonove si scriverà 409. Mancando le unità di molte classi, si suppliranno sempre con altrettanti zeri. In questo modo si scriveranno i numeri

dieci,	cento,	mille,	diecimila ec.	
10,	100,	1000,	10000,	e simili.

Le prime nove cifre si chiamano *significative* per distinguerle dalla cifra *zero* che non ha alcun valore.

8. Da quanto precede si deducono le regole seguenti:

Regola I. *Per leggere un numero scritto, quando questo numero non ha più di quattro cifre, si enuncia successivamente ciascuna cifra significativa a cominciare dalla sinistra indicando il nome delle unità che rappresenta.*

Esempio. 7963, *settemila novecento sessantatre.*
4008, *quattromila otto.*

Regola II. *Per leggere un numero scritto, quando questo numero ha più di quattro cifre, si decompone in gruppi di tre cifre cominciando dalla destra, avvertendo che l'ultimo a sinistra può contenere una o due cifre. Poi si legge ciascun gruppo a cominciare dalla sinistra come se fosse isolato, indicando l'ordine delle unità della sua ultima cifra.*

Esempio. Il numero 1020030400506 si legge:

Un trilione, *venti* bilioni, *trenta* milioni, *quattrocento* mila, *cinquecentosei.*

Regola III. *Per scrivere in cifre un numero enunciato in linguaggio ordinario, si pongono successivamente una dopo l'altra, procedendo dalla sinistra verso la destra, le cifre che esprimono i numeri di centinaia, diecine e unità di ciascuna classe a cominciare da quella di ordine maggiore, avvertendo di porre invece delle unità che mancano altrettanti zeri.*

Esempio. Il numero *trentacinque* bilioni, *cinquantanove* milioni, *sette* mila, *sessantaquattro*, si scrive:

3 5 0 5 9 0 0 7 0 6 4.

ESERCIZI.

I. Leggere i numeri

7 9 2 5 3 9 7 6 2 9 5
4 6 0 0 3 0 2 9 5 9 6 0 0 4
2 8 0 0 0 0 5 0 0 7 0 0 6

II. Scrivere in cifre i numeri: *trentanove trilioni*, *quarantasette bilioni*, *novecentosettantadue milioni*, *ventitremila sessantanove*; *quattro quatrilioni*, *settantacinque milioni*, *novantasei*.

III. Quante centinaia contiene il numero 734925?

IV. Quante diecine di milioni contiene il numero 539004536078?

CAPITOLO II.

ADDIZIONE E SOTTRAZIONE.

—

Addizione

9. *L' addizione è un' operazione che ha per oggetto di riunire più numeri in un solo.*

Il risultato dell' addizione si dice *somma.*

L' addizione s' indica col segno +, che si enuncia *più.* Così 7 + 8 significa 7 più 8.

10. Addizione dei numeri di una sola cifra. Sia proposto di trovare la somma di 7 e 5. Osserviamo che 5 equivale a 1 + 1 + 1 + 1 + 1; quindi aggiungere 5 a 7, è lo stesso che aggiungere a 7, una dopo l' altra, ciascuna delle unità che sono contenute nel 5. Così diremo 7 e 1, 8; 8 e 1, 9; 9 e 1, 10; 10 e 1, 11; 11 e 1, 12: 12 è la somma dei numeri 7 e 5.

Per agevolare la ricerca della somma dei numeri di una sola cifra, riporteremo qui una tavola, nella quale i risultamenti delle addizioni successive di un numero della prima colonna con tutti quelli posti sulla stessa linea orizzontale, si trovano registrati in piedi delle colonne seguenti. Questa tavola offre ancora il vantaggio di mostrare tutte le maniere di comporre un numero con l' addizione di due numeri più piccoli.

1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
2		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
3			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
4				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
5					1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6						1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
7							1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
8								1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
9									1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

11. Osservazione. Per aggiungere due numeri è inutile conoscere la specie delle unità che rappresentano, ma è sufficiente sapere che queste unità sono le stesse. Così, dicendo: *cinque e tre fanno otto*, si esprime ad una volta che: *cinque sedie e tre sedie fanno otto sedie, cinque penne e tre penne fanno otto penne, cinque calamai e tre calamai fanno otto calamai.*

Similmente diremo: 5 diecine e 3 diecine fanno 8 diecine; 5 centinaia e 3 centinaia fanno 8 centinaia; 5 migliaia e 3 migliaia fanno 8 migliaia, e così di seguito. Quindi dal perchè 5 unità e 3 unità danno per somma 8 unità, possiamo dedurre che 50 unità e 30 unità danno per somma 80 unità; 500 unità e 300 unità danno per somma 800 unità, ec.

12. Addizione di più numeri qualunque. È chiaro che per sommare i numeri composti di più cifre si potrebbe adoperare lo stesso metodo del numero 10; ma l'operazione sarebbe assai penosa e lunga quando i numeri da sommare fossero molto grandi; per conseguenza

conviene cercare un metodo che conduca più rapidamente al risultato.

Sia proposto di addizionare i numeri 7863, 596, 5649, 428.

Scriviamo questi numeri uno sotto all' altro, in modo che le unità siano sotto le unità, le diecine sotto le diecine, ec., in breve, in modo che le unità dello stesso ordine sieno in una stessa colonna verticale; e tiriamo una linea sotto all' ultimo numero per separarlo dal risultamento.

```
 7863
  596
 5649
  428
-----
14536
```

Per eseguire l'addizione di questi numeri, è chiaro che basta aggiungere successivamente le unità dello stesso ordine, cioè le unità semplici alle unità semplici, diecine alle diecine, le centinaia alle centinaia, ec.

Sommiamo dunque le unità semplici che si trovano nella prima colonna a destra; diremo: 3 e 6, 9; 9 e 9, 18; 18 e 8, 26; otteniamo 26 unità, le quali equivalgono a 6 unità che scriveremo sotto la colonna delle unità, e a 2 diecine che aggiungeremo alla somma delle diecine.

Sommiamo le diecine contenute nella seconda colonna; diremo: 2 diecine riportate e 6, 8; 8 e 9, 17; 17 e 4, 21; 21 e 2, 23; otteniamo 23 diecine, cioè 3 diecine che scriviamo sotto la colonna delle diecine, e 2 centinaia che aggiungeremo alla somma delle centinaia.

Sommiamo le centinaia; diremo: 2 centinaia ripor-

tate e 8, 10; 10 e 5, 15; 15 e 6, 21; 21 e 4, 25; otteniamo 25 centinaia, cioè 5 centinaia che scriviamo sotto la colonna delle centinaia e 2 migliaia che aggiungeremo alla somma delle migliaia.

Sommiamo le migliaia; diremo: 2 migliaia riportate e 7, 9; 9 e 5, 14; otteniamo 14 migliaia, cioè 4 migliaia che scriviamo sotto la colonna delle migliaia, e 1 diecina di migliaia che scriveremo alla sinistra di 4.

L'addizione è effettuata; la somma è 14536.

13. Da ciò si deduce la seguente

Regola. *Per sommare molti numeri composti di più cifre, si scrivono gli uni sotto gli altri in modo che le unità dello stesso ordine si trovino sopra una medesima colonna verticale. Si fa la somma delle cifre della prima colonna a destra ch' è quella delle unità; se questa somma non sorpassa* 9, *si scrive al risultato come cifra delle unità. Se supera* 9, *si scrivono le sole unità, e le diecine si ritengono a memoria per unirle alla seconda colonna, sulla quale si opera in un modo analogo e così di séguito sino all' ultima colonna, la cui somma, unita a ciò che si è riportato precedentemente, si scrive come si è trovata.*

Sottrazione.

14. *La sottrazione è una operazione che ha per oggetto di togliere un numero da un altro.*

Il numero maggiore si chiama *diminuendo*, il minore *diminutore*; il risultato *resto*.

La sottrazione s' indica col segno —, che si enuncia *meno*. Così 8 — 3 significa 8 meno 3.

È chiaro che se al resto si aggiunge il diminutore, deve riprodursi il diminuendo; quindi potremo definire la sottrazione ancora in un altro modo: *Dati che siano*

due numeri, trovarne un terzo che aggiunto al minore produca il maggiore.

15. Primo caso. Supponiamo che il diminutore sia di una sola cifra e il diminuendo sia minore del diminutore aumentato di 10 unità. Vogliasi, per esempio, sottrarre da 12, 5; potremo risolvere 5 nelle sue unità, e toglierle successivamente da 12; diremo: 12 meno 1, 11; 11 meno 1, 10; 10 meno 1, 9; 9 meno 1, 8; 8 meno 1, 7; 7 è il resto cercato.

In virtù della seconda definizione della sottrazione, sottrarre 5 da 12, vale lo stesso che trovare un numero che aggiunto a 5 produca il 12, cioè trovare quante unità bisogna aggiungere a 5 per ottenere il 12. La ripetuta addizione ci dà: 5 e 1, 6; 6 e 1, 7; 7 e 1, 8; 8 e 1, 9; 9 e 1, 10; 10 e 1, 11; 11 e 1, 12; donde si vede che per ottenere il 12 bisogna aggiungere 7 al 5; dunque 7 è il resto della sottrazione del 5 dal 12.

16. Osservazione. Per sottrarre due numeri uno dall'altro, è inutile conoscere la specie delle unità che rappresentano, ma è sufficiente sapere che queste unità sono le stesse. Così, dicendo: 7 *meno* 2 *fanno* 5, si esprime ad una volta che: 7 *sedie meno* 2 *sedie fanno* 5 *sedie;* 7 *penne meno* 2 *penne fanno* 5 *penne;* 7 *calamai meno* 2 *calamai fanno* 5 *calamai.*

Similmente diremo: 7 diecine meno 2 diecine equivalgono a 5 diecine, 7 centinaia meno 2 centinaia equivalgono a 5 centinaia, 7 migliaia meno 2 migliaia equivalgono a 5 migliaia, e così via discorrendo. Quindi dal perchè 7 unità meno 2 unità danno per resto 5 unità, possiamo dedurre che 70 unità meno 20 unità danno per resto 50 unità, 700 unità meno 200 unità danno per resto 500 unità ec.

17. Secondo caso. Supponiamo che i numeri dati

siano di più cifre, ma che ciascuna cifra del diminutore sia minore della cifra corrispondente del diminuendo. Questo caso si riduce al precedente osservando che potremo togliere le unità, diecine, centinaia ec. del diminutore, dalle unità, diecine, centinaia ec. del diminuendo, e riunire poi tutti questi resti parziali.

Proponiamoci di sottrarre 5462 da 17594.

Facendo la sottrazione nel modo indicato, avremo per resti parziali: 2 unità, 3 diecine cioè 30 unità, 1 centinaio cioè 100 unità, 2 migliaia cioè 2000 unità, 1 diecina di migliaia cioè 10000 unità; la somma di questi resti è 12132.

L'operazione si dispone nel modo seguente:

$$\begin{array}{r} 17594 \\ 5462 \\ \hline 12132 \end{array}$$

e per brevità la ricerca dei resti parziali e la loro somma si effettua contemporaneamente.

18. Terzo caso. *Diminuendo e diminutore qualunque.* Per eseguire la sottrazione in questo caso generale ci gioveremo del seguente principio:

Il resto della sottrazione di due numeri non cambia aumentando l'uno e l'altro egualmente.

Questo principio è evidente. 5 — 3 equivale a 7 — 5, a 11 — 9 ec.

Supponiamo di voler sottrarre 6947 da 24564; disponiamo questi due numeri come nel caso precedente.

$$\begin{array}{r} 24564 \\ 6947 \\ \hline 17617 \end{array}$$

Da 4 unità non si possono togliere 7 unità; aggiun-

giamo una diecina cioè 10 unità al diminuendo; avremo 14 unità, dalle quali tolte 7 unità si otterrà per resto 7. In virtù del principio enunciato di sopra, affinchè il resto non muti è necessario aggiungere una diecina al diminutore; quindi continueremo l'operazione come se il diminutore avesse per cifra delle diecine 5; e diremo, da 6 diecine tolte 5 diecine resta 1 diecina. Da 5 centinaia non si possono togliere 9 centinaia; aggiungiamo un migliaio cioè 10 centinaia al diminuendo; avremo 15 centinaia, dalle quali tolte 9 centinaia si ha per resto 6. Per non alterare il resto, dobbiamo aumentare di un migliaio il diminutore, e poichè da 4 migliaia non si possono togliere 7 migliaia, aggiungiamo una diecina di migliaia al diminuendo e al diminutore, e diremo, da 14 migliaia tolte 7 migliaia resta 7, e da 2 diecine di migliaia tolta 1 diecina di migliaia (quella che abbiamo aggiunta al diminutore) resta 1. Il resto cercato è dunque 17617.

Quindi potremo enunciare la seguente

REGOLA: *Per fare la sottrazione di due numeri si scrive il minore sotto al maggiore, in guisa che le unità dello stess' ordine si corrispondano; poi si toglie da ciascuna cifra del diminuendo la corrispondente del diminutore cominciando dalla destra; se una di queste sottrazioni è impossibile, si aggiungono dieci unità alla cifra superiore, ma allora si continua l'operazione come se la cifra seguente del diminutore fosse maggiore di una unità. I risultati di queste diverse sottrazioni sono le cifre del resto cercato.*

Prova dell'addizione e della sottrazione.

19. La prova di un'operazione è una seconda operazione che serve di riscontro alla prima. La prova di

un'addizione, è fondata sulla seguente semplicissima osservazione; cioè che se dalla somma ottenuta si sottraggono una dopo l'altra le somme parziali di cui è composta, cioè la somma dell'unità, quella delle diecine, quella delle centinaia, ec., il resto dev'essere zero quando l'operazione sia ben fatta. Per maggiore facilità le sottrazioni si cominceranno da sinistra. Così nell'esempio del numero (12) dalla somma 14536 toglieremo prima la somma 12 delle migliaia, si ha per resto 2536; poi toglieremo la somma 23 delle centinaia; dal resto 236 sottrarremo la somma 21 delle diecine, e finalmente dal resto 26 sottraendo la somma 26 delle unità, troveremo per ultimo resto zero. Dunque l'operazione è ben fatta. Il calcolo si dispone nel seguente modo:

	7 8 6 3
	5 9 6
	5 6 4 9
	4 2 8
Somma totale.	1 4 5 3 6
» *delle migliaia.*	1 2
	2 5
» *delle centinaia.* .	2 3
	2 3
» *delle diecine.*	2 1
	2 6
» *delle unità.*	2 6
	0 0

20. La prova di una sottrazione si fa aggiungendo il resto al diminutore; si deve trovare per risultato il diminuendo.

ESERCIZI.

I. Trovare la popolazione di Firenze nel 1861 sapendo che in quell'anno

il quartiere	S. Giovanni	aveva	25255	abitanti
»	Santa Croce	»	8869	»
»	Santa Maria Novella .	»	10964	»
»	Santo Spirito	»	13935	»

II. Nel 1848 la popolazione della Toscana era 1590090; nello stesso anno vi si aggiunsero 175170 abitanti del territorio lucchese e 89390 del territorio estense; a quanto ascendeva tutta la popolazione del granducato nel 1848?

III. Trovare la popolazione di tutta la Terra, sapendo che l'Europa contiene 168 milioni d'abitanti, l'Asia 580 milioni, l'Africa 92 milioni, l'America 150 milioni e l'Oceania 10 milioni.

IV. Di 524020 individui che si suppone abbiano 16 anni lo stesso giorno, ve ne ha 369404 solamente che raggiungono l'età di 40 anni; qual'è il numero di quelli che sono morti nell'intervallo?

V. Il raggio condotto dal centro della Terra al polo è di 6356080 metri; quello condotto all'equatore è di 6377398 metri. Calcolare la differenza, o lo schiacciamento della Terra a ciascun polo.

VI. La Terra, nel suo moto annuale attorno al Sole, non mantiene sempre la stessa distanza dal Sole; la distanza maggiore è di 24400 raggi terrestri, la minore di 23600 raggi terrestri. Qual'è la differenza?

VII. Nel 1848 tutta la Toscana contava 1,854,650 abitanti; nello stesso anno

Arezzo	aveva	34454	abitanti
Empoli	»	15514	»
Firenze	»	109435	»

Livorno	aveva	82648	abitanti
Lucca	»	64656	»
Pisa	»	46092	»
Pistoia	»	12578	»
Prato	»	34154	»
Siena	»	21107	»

Qual era la popolazione di tutto il resto della Toscana?

CAPITOLO III.

MOLTIPLICAZIONE.

21. *La moltiplicazione è un' operazione che ha per oggetto di formare un numero composto di tante parti eguali a un numero dato quante unità sono in un altro numero dato.*

Così moltiplicare 8 per 4 significa formare un numero composto di quattro parti eguali a 8.

Il primo dei numeri dati si chiama *moltiplicando*, il secondo *moltiplicatore*, il risultato *prodotto*. Il moltiplicando e il moltiplicatore si dicono *fattori* del prodotto.

La moltiplicazione s' indica scrivendo fra i due fattori il segno $\times$ oppure un semplice punto. Così 8×4 e $8.\ 4$ significano ambedue 8 moltiplicato per 4.

22. Dalla definizione della moltiplicazione apparisce che se il moltiplicatore è eguale all' unità, il prodotto è uguale al moltiplicando: quindi *il prodotto di un numero per* 1 *è questo stesso numero.*

23. Dalla stessa definizione risulta che la moltiplicazione è un caso particolare dell' addizione, quando i numeri da sommarsi sieno eguali fra loro. Infatti il prodotto di 9 per 3, dovendo essere un numero composto di tre parti eguali a 9, sarà $9 + 9 + 9$, cioè 27.

24. Aggiungendo un numero a se stesso una volta, due volte, tre volte, quattro volte ec., se ne forma il *doppio*, il *triplo*, il *quadruplo* ec. Così per esempio il 24 è *doppio* di 12, *triplo* di 8, *quadruplo* di 6; il 20 è *decuplo* di 2.

Onde nella moltiplicazione il prodotto è doppio,

triplo, quadruplo ec. del moltiplicando, se il moltiplicatore è respettivamente doppio, triplo, quadruplo ec. dell' unità. Così per esempio il prodotto di 12 per 4 è quadruplo di 12, perchè secondo la definizione esso è dato da $12 + 12 + 12 + 12$.

Nella moltiplicazione si distinguono tre casi; 1° moltiplicando e moltiplicatore di una sola cifra; 2° moltiplicando qualunque, moltiplicatore di una sola cifra; 3° moltiplicando e moltiplicatore qualunque.

25. Moltiplicando e moltiplicatore di una sola cifra. La moltiplicazione dei numeri di una sola cifra è facile ad eseguirsi per mezzo della seguente tavola detta di Pitagora.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Per formare questa tavola si procede nel seguente modo.

Scritta la prima linea orizzontale, la seconda si forma aggiungendo a sè stesso ciascuno dei numeri che la compongono; la terza aggiungendo ciascuna cifra della seconda linea alla corrispondente della prima; la quarta aggiungendo ciascuna cifra della terza alla corrispondente della prima ec.; in generale qualunque linea

si forma aggiungendo a ciascuna cifra della linea precedente la cifra corrispondente della prima linea.

Quindi la seconda linea è il prodotto della prima per 2; la terza è il prodotto della prima per 3....; in generale qualunque linea contiene i prodotti della cifra che la comincia per ciascuna delle cifre che compongono la prima linea. Talchè il prodotto di due numeri di una cifra, per esempio di 5 per 8, si troverà nell' incontro della linea orizzontale che comincia con 5 e della linea verticale che comincia con 8. Prima di procedere oltre, è indispensabile sapere a memoria tutti i prodotti contenuti in questa tavola.

26. Osservando attentamente la tavola della moltiplicazione, si vede che il prodotto di due numeri di una cifra è lo stesso, qualunque dei due fattori si prenda per moltiplicatore. Così 35 è il prodotto di 7 per 5 e di 5 per 7. Or questo è un caso particolare di un principio generale che si enuncia così:

Il prodotto di due numeri interi non cambia invertendo i fattori.

Sieno i fattori 27 e 4; vogliamo provare che il 4 ripetuto 27 volte equivale al 27 ripetuto 4 volte. Infatti 4 è eguale a $1+1+1+1$; quindi ripetere 27 volte il 4, è lo stesso che ripetere 27 volte ciascuna delle unità che esso contiene; ma 1 unità ripetuta 27 volte dà per prodotto 27, dunque 27 volte 4 equivale a $27+27+27+27$, cioè a 27 ripetuto 4 volte.

27. Osservazione. *L' ordine delle unità del prodotto è lo stesso di quello delle unità del moltiplicando.* Moltiplicare infatti 6 centinaia, per esempio, per 4 unità, è lo stesso che ripetere 6 centinaia 4 volte, ciò che dà per risultato (11) 24 centinaia.

28. Moltiplicando qualunque, moltiplicatore di una sola cifra. Proponiamoci di moltiplicare 5793

per 8. Il moltiplicando si può considerare come la somma di 3 unità più 9 diecine più 7 centinaia più 5 migliaia; quindi ripetere 8 volte 5793, è lo stesso che ripetere 8 volte ciascuna di queste parti ed aggiungere i risultati; si ha:

8 volte 3 unità.		24 unità
8 volte 9 diecine . . 72 diecine, cioè		720 unità
8 volte 7 centinaia. 56 centinaia, cioè		5600 unità
8 volte 5 migliaia . 40 migliaia, cioè		40000 unità
	Somma . . .	46344

Nella pratica si aggiungono questi prodotti parziali a misura che si ottengono. Così nell' esempio precedente si dirà:

$$\begin{array}{r} 5\ 7\ 9\ 3 \\ 8 \\ \hline 4\ 6\ 3\ 4\ 4 \end{array}$$

8 volte 3 unità, 24 unità; scrivo 4 e ritengo 2 diecine. 8 volte 9 diecine, 72 diecine e 2 del prodotto precedente, 74 diecine; scrivo 4 diecine e ritengo 7 centinaia. 8 volte 7 centinaia, 56 centinaia e 7, 63 centinaia; scrivo 3 e ritengo 6 migliaia. 8 volte 5 migliaia, 40 migliaia e 6, 46 migliaia, che scrivo alla sinistra delle tre prime cifre ottenute.

29. *Per moltiplicare un numero qualunque per una cifra significativa seguita da uno o più zeri, si moltiplica per questa cifra, considerata come rappresentante unità semplici, e si scrivono alla destra del prodotto tanti zeri quanti ve ne sono alla destra del moltiplicatore.*

Debbasi infatti moltiplicare 5793 per 8000, cioè per 8 migliaia. Il prodotto di questi due numeri è uguale (26)

a quello di 8 migliaia per 5793, cioè a 46344 migliaia (27), ovvero a 46344000.

30. Da ciò si deduce che per moltiplicare un numero per 10, 100, 1000 ec., basta scrivere uno, due, tre zeri alla sua destra. Supponiamo, per esempio, di voler moltiplicare 47 per 1000; secondo la regola precedente bisogna moltiplicare 47 per 1 e alla destra del prodotto aggiungere tre zeri. Ma 47 moltiplicato per 1 dà (22) 47 per prodotto; dunque il prodotto di 47 per 1000 è 47000.

31. Moltiplicando e moltiplicatore qualunque. Sia proposto di moltiplicare 7458 per 379. Dovremo ripetere 379 volte 7458, lo che equivarrà a ripeterlo successivamente 9 volte, 70 volte e 300 volte, ed aggiungere i risultati. Ciascuna di queste moltiplicazioni parziali si effettua come nei casi precedenti e non richiede nuove spiegazioni; possiamo quindi enunciare la seguente

Regola. *Per fare il prodotto di due numeri interi, si moltiplica successivamente il moltiplicando per ciascuna cifra del moltiplicatore, e si aggiungono i risultati, dopo aver posto alla destra di ciascuno di essi un numero di zeri eguale al numero delle cifre che precedono il moltiplicatore da cui proviene.*

Nella pratica si fa a meno di scrivere gli zeri, bastando dare alle cifre dei prodotti parziali, il posto che occuperebbero dopo l' aggiunzione di questi zeri.

Esempio:

```
     7458
      379
    -----
    67122
   52206
  22374
  -------
  2826582
```

32. Quando si è acquistata sufficiente pratica nel calcolare, si può eseguire la moltiplicazione più rapidamente nel seguente modo. Prendiamo l'esempio precedente. È chiaro che le unità del prodotto non possono provenire che dal prodotto delle unità del moltiplicando per quelle del moltiplicatore; questo prodotto è nell'esempio attuale 72 unità; scriviamo le 2 unità e riteniamo le 7 diecine. Le diecine del prodotto debbono provenire dalla moltiplicazione delle unità del moltiplicatore per le diecine del moltiplicando e delle diecine del primo per le unità del secondo; questi due prodotti parziali sono rispettivamente 45 e 56; la loro somma 101 aggiunta alle 7 diecine riportate dà 108 diecine, cioè 8 diecine che scriviamo e 10 centinaia che riteniamo. Le centinaia del prodotto provengono dalla moltiplicazione delle unità, diecine e centinaia del moltiplicatore, rispettivamente per le centinaia, diecine e unità del moltiplicando, cioè dalla moltiplicazione di 9 per 4, 36; di 7 per 5, 35; di 3 per 8, 24; la somma 95 di questi tre prodotti parziali aggiunta alle 10 centinaia riportate dà 105 centinaia, cioè 5 centinaia che scriviamo e 10 migliaia che riteniamo. Le migliaia del prodotto provengono dalla moltiplicazione dell'unità, diecine e centinaia del moltiplicatore rispettivamente per le migliaia, centinaia, e diecine del moltiplicando, cioè di 9 per 7, 63; di 7 per 4, 28; di 3 per 5, 15; la somma 106 di questi tre prodotti parziali aggiunta alle 10 migliaia riportate dà 116 migliaia, cioè 6 migliaia che scriviamo e 11 diecine di migliaia che riteniamo. Le diecine di migliaia del prodotto provengono dalla moltiplicazione delle diecine e delle centinaia del moltiplicatore rispettivamente per le migliaia e centinaia del moltiplicando, cioè di 7 per 7, 49, e di 3 per 4, 12; la somma di questi prodotti parziali 61 aggiunta alle 11 diecine di migliaia

riportate da 72 diecine di migliaia, cioè 2 diecine di migliaia che scriviamo e 7 centinaia di migliaia che riteniamo. Le centinaia di migliaia del prodotto provengono dalla moltiplicazione delle centinaia del moltiplicatore per le migliaia del moltiplicando, cioè di 3 per 7 ch'è 21; aggiunto a questo risultato le 7 centinaia di migliaia riportate, ho 28 centinaia di migliaia, che scrivo accanto alle precedenti.

33. Quando i numeri che si vogliono moltiplicare fra loro terminano con zeri, si può eseguire la moltiplicazione come se questi zeri non fossero, purchè se ne aggiungano alla destra del prodotto tanti quanti ne contengono i due fattori. Infatti moltiplicare, per esempio, 378000 per 2700 è lo stesso che moltiplicare 378000 per 27 centinaia, ciò che equivale a moltiplicare (29) 27 per 378 e aggiungere alla destra del risultato tre zeri; e poichè questo prodotto rappresenta centinaia, bisognerà aggiungere alla sua destra due nuovi zeri. Quindi moltiplico 378 per 27, e alla destra del prodotto 10206, aggiungo cinque zeri; il prodotto è 1020600000.

34. Finora abbiamo parlato della moltiplicazione di due numeri solamente. Ma se i numeri da moltiplicare fossero più di due, per esempio, se si dovesse trovare il prodotto di $3 \times 7 \times 2 \times 4 \times 5$, si procederebbe a questa guisa. 3×7 è uguale a 21, 21×2 è uguale a 42, 42×4 è uguale a 168, 168×5 è uguale a 840; 840 è il prodotto cercato. In generale, *si moltiplica il primo fattore pel secondo, il prodotto ottenuto pel terzo, il nuovo prodotto pel quarto, e così via sino a che si sieno esauriti tutti i fattori; l' ultimo prodotto ottenuto è il prodotto richiesto.*

35. Il prodotto di un numero per se stesso si chiama il suo *quadrato* o la sua *potenza seconda.* Così 3×3 o 9 è il quadrato di 3; 7×7 o 49 è il quadrato di 7.

Il quadrato di 10 è 10×10 o 100; il quadrato di 100 è 100×100 o 10000; il quadrato di 1000 è 1000×1000 o 1000000 ec. Dunque *per formare il quadrato di* 10, 100, 1000 ec. *basta raddoppiare gli zeri.*

Un numero moltiplicato due volte per se stesso dà un prodotto che si chiama *cubo* o *potenza terza.* Così $3 \times 3 \times 3$ o 27 è il cubo di 3; $7 \times 7 \times 7$ o 343 è il cubo di 7.

Il cubo di 10 è $10 \times 10 \times 10$ o 1000; il cubo di 100 è $100 \times 100 \times 100$ o 1000000 ec. Dunque *per formare il cubo di* 10, 100, 1000 ec. *basta triplicare gli zeri.*

Un numero moltiplicato tre volte per se stesso dà un prodotto che si chiama *potenza quarta.* Così $3 \times 3 \times 3 \times 3$ o 81 è la potenza quarta di 3; $7 \times 7 \times 7 \times 7$ o 2401 è la potenza quarta di 7.

In generale, un numero moltiplicato 4, 5, 6, 7, ec. volte per se stesso, dà un prodotto che si chiama *quinta, sesta, settima* ec. *potenza di questo numero.* Così $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ o 729 è la sesta potenza di 3.

Invece di scrivere

$$7 \times 7,\ 7 \times 7 \times 7,\ 7 \times 7 \times 7 \times 7,\ 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$$

si preferisce di scrivere più brevemente

$$7^2, \quad 7^3, \quad 7^4, \quad 7^5,$$

che si legge 7 inalzato a quadrato, 7 inalzato a cubo, 7 inalzato a quarta potenza, 7 inalzato a quinta potenza ec.

Un numero posto al disopra di un altro e un poco verso la destra, si chiama *esponente* ed indica quante volte il numero su cui è collocato deve esser preso come fattore. Così 7^4 indica che 7 deve esser preso quattro volte come fattore: 4 è l' esponente.

Per facilità porremo qui una tavola delle potenze successive dei numeri di una sola cifra:

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9
1	4	9	16	25	36	49	64	81
1	8	27	64	125	216	343	512	729
1	16	81	256	625	1296	2401	4096	6561
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

La formazione di questa tavola è evidente: la prima linea contiene i numeri di una sola cifra; la seconda, che contiene i quadrati, si forma moltiplicando ciascun numero della prima linea per se stesso; la terza, che contiene i cubi, si forma moltiplicando ciascun numero della prima linea pel corrispondente della seconda; la quarta che contiene le quarte potenze, si forma moltiplicando ciascun numero della prima linea pel corrispondente della terza ec.

36. Si chiama *multiplo* di un numero il prodotto di questo numero per un altro qualunque; così per esempio 6 è un multiplo di 3, perchè uguaglia il prodotto di 3 per 2; 63 è un multiplo di 9, perchè uguaglia il prodotto di 9 per 7. Quindi in generale il prodotto di due o più numeri è sempre un multiplo di ciascuno dei suoi fattori.

È chiaro che addizionando insieme più multipli di uno stesso numero, si ottiene per somma un multiplo di questo stesso numero. Così 96, 132, 240 sono multipli di 12, la loro somma 468 è un multiplo di 12. Infatti i numeri dati equivalgono rispettivamente a 8 *dozzine*, 11 *dozzine*, 20 *dozzine;* quindi, per la stessa ragione che la somma di 8 *unità*, più 11 *unità*, più 20 *unità*, è 39 *unità*, la somma di 8 *dozzine*, più 11 *dozzine*, più 20 *dozzine*, è 39 dozzine, cioè 39×12, ovvero un multiplo di 12.

ESERCIZI.

I. Il giorno contiene 24 ore; l'ora contiene 60 minuti; il minuto 60 secondi. Quanti minuti e quanti secondi contiene il giorno?

II. Una locomotiva percorre 11 miglia ogni ora; quante miglia percorrerà in 1[illegible] ore?

III. La circonferenza della Terra contiene 360 gradi; ogni grado vale 60 miglia italiane, 25 leghe comuni francesi, 20 leghe marine, 12 leghe di Germania, 69 miglia inglesi, 18 leghe portoghesi. Quante miglia italiane, leghe comuni e marine francesi, leghe tedesche, miglia inglesi, leghe portoghesi contiene la circonferenza della Terra?

IV. Il miglio inglese equivale a 1609 metri; a quanti metri equivale la circonferenza della Terra?

V. Il volume del Sole contiene quello della Terra 1404928 volte; il volume della Luna è contenuto in quello della Terra 49 volte. Quante volte il volume del Sole contiene quello della Luna?

VI. Il Sole è distante dalla Terra per 24000 raggi terrestri; prendendo per raggio medio della Terra 6366000 metri, qual'è la distanza in metri del Sole?

VII. La distanza media della Luna dalla Terra è di 60 raggi terrestri; qual'è la distanza in metri della Luna?

VIII. Il suono percorre 340 metri per secondo. Il rumore del tuono è stato udito 27 secondi dopo l'apparizione del lampo; trascurando il tempo che impiega la luce del lampo a venire dalla nuvola all'occhio dell'osservatore, a qual distanza si trova la nuvola che ha prodotto il tuono?

IX. Di 1000000 che si suppongono nati in Francia nello stesso istante, ne muoiono nel medio 14057 ogni anno in un intervallo di 50 anni. Quanti individui restano vivi alla fine del 50esimo anno?

CAPITOLO IV.

DIVISIONE.

37. *La divisione è un' operazione che ha per oggetto, dati che sieno due numeri, di trovarne un terzo che moltiplicato pel minore produca il maggiore.*

Così dividere 35 per 7 significa trovare un numero che moltiplicato per 7 produca 35; questo numero è 5.

Il numero maggiore si chiama *dividendo,* il minore *divisore,* il numero cercato *quoziente.* Nell' esempio addotto 35 è il dividendo, 7 il divisore, 5 il quoziente.

La divisione s' indica col segno : Così 12 : 4 significa 12 diviso per 4.

38. Dalla definizione risulta che *il prodotto del divisore pel quoziente pareggia il dividendo.*

39. La divisione può essere definita ancora in due altri modi, utili a conoscere.

Poichè 35 è il prodotto di 7 per 5 o di 5 per 7, ne segue (21) che 35 è un numero composto di 5 parti eguali a 7 o di 7 parti eguali a 5. Considerando 35 come un numero composto di 5 parti eguali a 7, si vede chiaro che 35 contiene 5 volte il 7; quindi dividere 35 per 7 significa cercare quante volte il 7 è contenuto nel 35. Considerando 35 come un numero composto di 7 parti eguali a 5, si vede chiaro che dividere 35 per 7 significa decomporre 35 in 7 sette parti eguali. Così, per esempio, se ho un gruppo di 35 gettoni che voglio decomporre in 7 gruppi eguali, ciò si riduce a dividere 35

per 7, il quoziente 5 esprime che ciascun gruppo deve contenere 5 gettoni.

Da queste due diverse maniere di considerare la divisione nascono le due seguenti definizioni:

La divisione è un' operazione che ha per oggetto di cercare quante volte un numero è contenuto in un altro.

La divisione è un' operazione che ha per oggetto di decomporre un numero in tante parti eguali quante unità sono contenute in un altro numero.

In virtù di quest' ultima definizione, dividere un numero per 2, significa decomporlo in due parti eguali; il quoziente si chiama la *metà* o *un mezzo* del numero dato. Dividere un numero per 3, significa decomporlo in tre parti eguali; il quoziente si dice *un terzo* del numero dato. In generale il quoziente della divisione di un numero per 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 ec. riceve il nome di *quarto, quinto, sesto, settimo, ottavo, nono, decimo, undecimo, dodicesimo* ec. Dunque quando si dice, 8 è il sesto di 48, ciò torna lo stesso che dire è il quoziente di 48 diviso per 6.

40. Non sempre è possibile trovare un numero che moltiplicato pel divisore dia il dividendo. Così se il dividendo è 58 e il divisore è 7, non vi è un numero che moltiplicato per 7 produca 58. In questo caso cercheremo il maggior numero che moltiplicato pel divisore dia un prodotto minore del dividendo, o in altre parole, cercheremo il massimo multiplo del divisore che è contenuto nel dividendo. Questo numero nell' esempio attuale è 8, il cui prodotto per 7 è 56, minore di 58; il prodotto di 7 per 9 darebbe 63, numero maggiore di 58.

Se dal dividendo si toglie il prodotto del divisore pel quoziente, ciò che rimane si dice *resto*. Nell' esem-

pio precedente il resto è 2. Quindi *il prodotto del divisore pel quoziente più il resto è uguale al dividendo.*

Giovandoci della seconda definizione della divisione, si vede che togliendo dal dividendo il divisore tante volte quanto è possibile, ciò che rimane è il resto della divisione. Dal che apparisce evidente che il resto dev' esser minore del divisore, poichè altrimenti da esso si potrebbe togliere ancora una volta il divisore: dunque possiamo dire:

Il resto di una divisione è sempre minore del divisore.

41. Nella divisione distingueremo due casi: 1° quoziente di una cifra; 2° quoziente di più cifre. Il primo caso si risolve in tre:

I. *Divisore di una cifra.* Poichè il prodotto del quoziente pel divisore deve dare un numero uguale o minore del dividendo, quest' ultimo non può contenere più di due cifre. Quindi si cercherà nella tavola di moltiplicazione il maggior numero che moltiplicato pel divisore dia un prodotto uguale o minore del dividendo; questo numero è il quoziente.

Debbasi dividere 38 per 7. La tavola di moltiplicazione ci fa vedere che non v'è un numero che moltiplicato per 7 produca 38: onde si cercherà nella tavola il massimo multiplo di 7 che è contenuto nel 38; si trova 35, che proviene dal prodotto di 7 per 5; dunque 5 è il quoziente e 3 il resto.

Osservazione. Poichè 38 *unità* contengono 7 *unità* 5 volte più un avanzo di 3 *unità*, ne segue evidentemente che 38 *diecine* contengono 7 *diecine* 5 volte più un avanzo di 3 *diecine;* 38 *centinaia* contengono 7 *centinaia* 5 volte più un avanzo di 3 *centinaia;* 38 *migliaia* contengono 7 *migliaia* 5 volte più un avanzo di 3 *mi-*

gliaia, ec. Dunque poichè 38 : 7 dà per quoziente 5 e per resto 3, ne segue che 380 : 70 dà per quoziente 5 e per resto 30, che 3800 : 700 dà per quoziente 5 e per resto 300, ec. Laonde possiamo dire che: *moltiplicando il dividendo e il divisore per* 10, 100, 1000 ec., *il quoziente non cambia e il resto è moltiplicato per* 10, 100, 1000 ec.

II. *Divisore formato da una cifra significativa seguita da uno o più zeri.*

Cominceremo dall' avvertire che affinchè il quoziente sia di una cifra, bisogna che il dividendo sia minore del decuplo del divisore, lo che si riconoscerà facilmente ponendo uno zero alla destra del divisore; ed osservando se il numero così formato è maggiore del dividendo.

Sia proposto di dividere 47592 per 6000. Il dividendo si può considerare composto di 47 migliaia e di 592 unità; ora 6 migliaia non possono essere contenute in 592 unità; dunque per trovare il quoziente basta vedere quante volte 6 migliaia sono contenute in 47 migliaia, o ciò ch'è lo stesso, quante volte 6 è contenuto in 47. 47 contiene il 6 sette volte più un avanzo di 5; dunque (osservazione precedente) 47 migliaia contengono 6 migliaia 7 volte più un avanzo di 5 migliaia. Quindi il quoziente della divisione di 47592 per 6000 è 7, ed il resto è 5000 + 592, cioè 5592. Per lo che possiamo dire in generale: *Quando il divisore è composto di una cifra significativa seguita da uno o più zeri, per trovare il quoziente, si sopprimono questi zeri e altrettante cifre del dividendo.*

III. *Divisore qualunque.* Debbasi dividere 57639 per 7982. Proveremo innanzi tutto che il quoziente della divisione di 57639 per 7982 è uguale o minore al quoziente di 57639 diviso per 7000. Infatti, per ciò che ab-

biamo detto innanzi, quest' ultimo quoziente è 8, per lo che 7000 non è contenuto più di 8 volte in 57639; onde a più forte ragione 7982 non potrà essere contenuto più di 8 volte nel dividendo; ma potrà esservi contenuto un minor numero di volte, poichè 7982 è maggiore di 7000. Per riconoscere se il quoziente è 8 o un numero mino e di 8, si moltiplica 8 pel divisore e si trova per prodotto 63856, numero maggiore del dividendo; dunque 8 non può essere il quoziente che si cercava. Esaminiamo se è 7. Moltiplicando 7 per 7982 si trova per prodotto 55874, numero minore di 57639; dunque 7 è il quoziente della divisione di 57639 per 7982, ed il resto è dato da 57639 — 55874, cioè da 1765.

Come secondo esempio, sia proposto di dividere 2963 per 485. Il quoziente di 29 per 4 è 7; il quoziente che si cerca è 7 o un numero minore di 7. Il prodotto di 485 per 7 è 3395, numero maggiore di 2963; dunque 7 non è il quoziente cercato. Proviamo 6. Il prodotto di 485 per 6 è 2910, numero minore di 2963; dunque 6 è il quoziente della divisione proposta. Il resto è dato da 2963 — 2910, cioè da 53.

Da quel che precede desumiamo la seguente

REGOLA. *Per fare la divisione quando il dividendo è minore del decuplo del divisore, si separa alla sinistra del dividendo la parte dello stesso ordine della prima cifra a sinistra del divisore; si divide il numero separato per la prima cifra del divisore, e si prova la cifra così ottenuta; se il prodotto del divisore per questa cifra è contenuto nel dividendo, questa cifra è il quoziente cercato; altrimenti si prova la cifra minore di un' unità, e si continuano le prove sino a che si trovi un prodotto contenuto nel dividendo.*

42. QUOZIENTE DI PIÙ CIFRE. Proponiamoci di dividere 7539278 per 897. L' operazione si dispone come

qui sotto:

```
7 5 3 9 2 7 8   | 8 9 7
7 1 7 6         |---------
-------         | 8 4 0 4
  3 6 3 2
  3 5 8 8
  -------
    4 4 7 8
    3 5 8 8
    -------
      8 9 0
```

Separiamo alla sinistra del dividendo tante cifre quante ne occorrono per formare un numero maggiore del divisore e minore del suo decuplo; siccome il decuplo del divisore è 8970, è chiaro che bisognerà separare quattro cifre. Il numero separato 7539 esprime migliaia; ora è facile provare che la prima cifra del quoziente esprime migliaia, cioè che il quoziente è compreso fra 1000 e 10000. Infatti il prodotto di 897 per 10000 è 8970000, numero maggiore di 7539278; dunque il divisore non è contenuto 10000 volte nel dividendo. Il prodotto di 897 per 1000 è 897000, numero inferiore a 7539278; dunque il divisore è contenuto 1000 volte nel dividendo e per conseguenza la prima cifra del quoziente esprime migliaia. Onde il valore di questa prima cifra deve risultare dalla divisione delle 7539 migliaia del dividendo pel divisore, poichè le 278 unità essendo di ordine inferiore a un migliaio non possono influire sul valore di una cifra che rappresenta migliaia. La divisione di 7539 per 897 si effettua come nel numero precedente e dà per quoziente 8; 8 è la prima cifra del quoziente.

Per trovare la seconda cifra, moltiplico 8 migliaia per 897, sottraggo dal dividendo il prodotto 7176 migliaia, e trovo il resto 363278. La seconda cifra del

quoziente si otterrà dividendo 363278 per 897. Questa seconda divisione si esegue in un modo affatto simile a quello tenuto per la prima; separeremo alla sinistra del nuovo dividendo il numero 3632 maggiore del divisore e minore del suo decuplo; dividendo 3632 per 897 si trova per quoziente 4; 4 è la seconda cifra del quoziente, ch' esprime centinaia.

Il prodotto di 4 centinaia per 897 è 3588 centinaia, il qual numero sottratto da 363278 dà per resto 4478. Per trovare la terza cifra del quoziente bisognerebbe dividere le 447 diecine del resto per 887; ma siccome questa divisione non si può effettuare, ne segue che la cifra delle diecine del quoziente è 0. La quarta cifra del quoziente si ottiene dalla divisione di 4478 per 897; ed è 4. Dunque il quoziente è 8404, ed il resto è 890, differenza fra 4478 e il prodotto di 4 per 897.

43. Dal ragionamento precedente si vede che le migliaia del quoziente si ottengono cercando quante volte il divisore è contenuto nelle 7539 migliaia del dividendo proposto; le centinaia del quoziente, cercando quante volte il divisore è contenuto nelle 3632 centinaia del secondo dividendo; le diecine, cercando quante volte il divisore è contenuto nelle 447 diecine del terzo dividendo; e finalmente le unità, cercando quante volte il divisore è contenuto nell' ultimo dividendo. I numeri 7539, 3632, 447, 4478, che divisi pel divisore danno le cifre successive del quoziente, si chiamano *dividendi parziali*. Nell' eseguire l' operazione basta scrivere i soli dividendi parziali; il primo si ottiene separando alla sinistra del dividendo proposto tante cifre quante ne occorrono per formare un numero maggiore del divisore e minore del suo decuplo; il secondo, aggiungendo alla destra del resto 363 della prima divisione la cifra seguente 2 del dividendo proposto; il terzo, aggiun-

gendo alla destra del resto 44 della seconda divisione la cifra seguente 7 del dividendo proposto, e così via discorrendo sino a che si siano prese tutte le cifre del dividendo.

Potremo dunque enunciare la seguente

Regola. *Per dividere un numero per un altro, si separano alla sinistra del dividendo tante cifre quante ne occorrono per formare un numero maggiore del divisore e minore del suo decuplo; quindi si cerca quante volte il divisore è contenuto in questo primo dividendo parziale, lo che dà la prima cifra del quoziente: poi si moltiplica il divisore per questa cifra e il prodotto si toglie dal primo dividendo parziale; alla destra del resto di questa prima divisione si abbassa la cifra seguente del dividendo proposto, e si ha il secondo dividendo parziale, sul quale si opera come sul precedente: l'operazione si continua in questo modo, finchè il dividendo proposto è esaurito.*

44. Nella pratica per procedere più speditamente si eseguono ad un tempo le moltiplicazioni e le sottrazioni necessarie per ottenere i resti successivi. Così nell'esempio seguente:

```
1735547  | 738
 2595    |2351
  3814
   1247
    509
```

Si dirà: 17 diviso per 7, 2; 2 volte 8, 16, da 25, 9 e porto 2; 2 volte 3, 6, e 2, 8, da 13, 5 e porto 1; 2 volte 7, 14, e 1, 15, da 17, 2: lo stesso si ripete per le altre divisioni.

45. Il metodo che abbiamo dato (41) per trovare le cifre del quoziente in ogni divisione parziale, riuscendo

lungo in molti casi, nella pratica se ne preferisce un altro che conduce più rapidamente al risultato: dichiariamolo con un esempio.

Sia da dividere 1873 per 392. Il quoziente dev' essere 6 o un numero minore. Sarà 6 se esso è contenuto in 1873 un numero di volte eguale o maggiore a 392; sarà un numero minore di 6 nel caso contrario. Ora, ed è in ciò che precipuamente consiste la preferenza di questo metodo sull' altro, è cosa facilissima vedere quante volte un numero di una sola cifra è contenuto in un altro numero qualunque, e si fa nel seguente modo. Il 6 è contenuto 3 volte esattamente nel 18; 1 volta nel 7, con avanzo di 1; è inutile continuare, perchè il quoziente cominciando con 31 è minore di 392; quindi la cifra 6 è da rigettare. Il quoziente è 5 se questo è contenuto in 1783 un numero di volte eguale o maggiore a 392; ora il 5 è contenuto 3 volte nel 18 con un avanzo di 3; 7 volte nel 37 con un avanzo di 2; è inutile continuare perchè il quoziente cominciando con 37 è minore di 392: dunque la cifra 5 è da rigettare. Il quoziente è 4 se questo è contenuto in 1873 un numero di volte eguale o maggiore a 392; ora il 4 è contenuto 4 volte nel 18 con un avanzo di 2; è inutile continuare, perchè il quoziente cominciando con 4 è maggiore di 392. Dunque 4 è il quoziente che si cercava. Il tutto può effettuarsi a memoria, senza bisogno di scriver nulla.

46. Quando il dividendo e il divisore terminano con zeri, si può sopprimere un egual numero di zeri tanto all' uno quanto all' altro senza alterare il quoziente. Debbasi, per esempio, dividere 7860000 per 56000; la quistione si riduce a cercare quante volte 56 migliaia sono contenute in 7860 migliaia, e si vede che vi sono contenute 140 volte più 20 migliaia; dun-

que bisogna dividere 7860 per 56 e alla destra del resto aggiungere tre zeri.

Prova della divisione e della moltiplicazione.

47. Per fare la prova di una divisione si moltiplica il divisore pel quoziente, e al prodotto si aggiunge il resto; la somma dev' essere eguale al dividendo. Infatti supponiamo che dividendo 7834 per 31, si sia trovato 252 per quoziente e 22 per resto; il dividendo deve contenere 31 volte 252 più un avanzo di 22 unità; dunque 7834 dev' essere eguale a 31 moltiplicato per 252 più 22.

La divisione offre un mezzo per fare la prova di una moltiplicazione. Infatti è chiaro che il prodotto di due numeri diviso per uno di essi deve dare per quoziente l' altro numero e per resto zero. Così il prodotto 2826582 dei due numeri 7458 e 379 diviso per 7458 deve dare per quoziente 379 e per resto zero.

ESERCIZI.

I. Una pezza di panno è costata 456 lire; sapendo che un braccio dello stesso panno costa 12 lire, quante braccia contiene la pezza comprata?

II. 529 braccia di stoffa sono costate 7935 lire; quante lire costa un braccio di quella stoffa?

III. Quanto tempo ci vorrebbe per fare il giro della Terra, se si potesse camminare continuamente facendo 1 miglio (italiano) ogni ora?

IV. Due viaggiatori si muovono l' uno all' incontro dell' altro; ora essi sono distanti per 20704 metri; il primo percorre 12 metri ogni minuto, il secondo 20. Dopo quanto

tempo i due viaggiatori s' incontreranno? A qual distanza si troveranno allora dai rispettivi punti di partenza?

V. Di 1000000 d' individui nati in Francia lo stesso giorno, alla fine di 39 anni ne restano solamente 376390. Quante persone sono morte ogni anno?

VI. La Francia consuma ogni anno 5716439726 litri di grano. Supponendo che il numero degli abitanti sia 34230178, quanti litri di grano consuma per anno ogni abitante?

VII. La luce percorre 77000000 di metri ogni secondo; quanto tempo impiegherà a venire dal Sole alla Terra?

VIII. Il suono percorre 340 metri ogni secondo; quanto tempo impiegherebbe a venire dalla Luna alla Terra se vi fosse un' atmosfera per trasmetterlo?

CAPITOLO V.

DIVISORI DEI NUMERI. — NUMERI PRIMI.

48. Quando un numero diviso per un altro dà per resto zero, si dice che il primo è *divisibile* pel secondo. Esempio: 42 è divisibile per 7, perchè dividendo questi due numeri uno per l'altro si ha per resto zero.

Da questa definizione risulta che un numero divisibile per un altro è uno dei suoi multipli; così 42 è un multiplo di 6. Reciprocamente tutti i multipli di un numero sono divisibili per questo numero.

Un numero qualunque si chiama *divisore* dei suoi multipli: 6 un divisore di 42.

Quindi le seguenti espressioni sono equivalenti:

42 è divisibile per 6.
42 è un multiplo di 6.
6 è un divisore di 42.

Volendo esprimere l'eguaglianza di due numeri si suole interporre fra essi il segno $=$; così: $42 = 7 \times 6$, si legge 42 uguale a 7 moltiplicato per 6.

49. *Per dividere un prodotto di due fattori per uno di essi, basta sopprimere questo fattore.*

Sia 7×9 il prodotto dato che voglio dividere per 9; il quoziente è evidentemente 7, poichè il divisore 9 moltiplicato per 7, produce il dividendo 7×9.

50. *Un numero qualunque divide i suoi multipli.*

Si abbia un multiplo di 13; questo multiplo è uguale a 13 moltiplicato per un altro numero: ora (49) per dividere questo prodotto per 13 basta sopprimere 13.

51. I multipli di 2 si dicono *numeri pari;* i numeri che non sono multipli di 2 si dicono *numeri dispari.* Osservando la serie dei numeri

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 ec.

si vede che i numeri pari e dispari si succedono alternativamente; 1, 3, 5, 7, 9, 11 ec. numeri dispari; 2, 4, 6, 8, 10 ec. numeri pari. È chiaro ancora che qualunque numero dispari è uguale a un numero pari più 1; così 17 è uguale a $16 + 1$.

52. *I numeri che hanno per cifra delle unità una delle seguenti:* 0, 2, 4, 6, 8; *sono numeri pari.*

Abbiasi il numero 750. Questo numero è uguale a 75×10, o, ch'è lo stesso, a $75 \times 5 \times 2$; dunque 750 è un multiplo di 2, e quindi è pari.

Abbiasi il numero 896. Questo numero è uguale a $890 + 6$; 890 è un multiplo di 2; 6 è un multiplo di 2, dunque la somma $890 + 6$, o 896 è un multiplo di 2, ed è quindi un numero pari.

La dimostrazione sarebbe la stessa pei numeri che terminano con 2, 4, 8.

Onde *tutti i numeri che terminano con una delle cifre:* 0, 2, 4, 6, 8 *sono divisibili per* 2.

53. *I numeri che hanno per cifra delle unità* 0, *o* 5; *sono divisibili per* 5.

Abbiasi il numero 530. Questo numero è uguale a 53×10, ovvero a $53 \times 2 \times 5$: dunque 530 è un multiplo di 5, e quindi è divisibile per 5.

Abbiasi il numero 645. Questo numero è uguale a $640 + 5$; 640 è un multiplo di 5, onde la somma $640 + 5$ o 645, è un multiplo di 5, ed è quindi divisibile per 5.

54. *I numeri che terminano con* 00, 25, 50, 75; *sono divisibili per* 25.

Abbiasi il numero 4675. Questo numero è uguale a $4600 + 75$; 4600 è un multiplo di 25 perchè equivale a 46×100, o ciò ch'è lo stesso a $46 \times 4 \times 25$; 75 è un multiplo di 25, dunque la somma $4600 + 75$, o 4675 è un multiplo di 25, e per conseguenza è divisibile per 25.

55. ***I numeri le cui due ultime cifre formano un numero divisibile per 4, sono divisibili per 4.***

Abbiasi il numero 7348. Questo numero è uguale a $7300 + 48$; 7300 è un multiplo di 4, perchè equivale a 73×100, o, ch'è lo stesso, a $73 \times 25 \times 4$; 48 è un multiplo di 4; dunque la somma $7300 + 48$, o 7348, è un multiplo di 4, per lo che è divisibile per 4.

56. ***Il numero formato dall'unità seguita da un numero qualunque di zeri è uguale a un multiplo di 9 più 1.***

$$10 = 9 + 1$$
$$100 = 9 \times 11 + 1$$
$$1000 = 9 \times 111 + 1$$
$$10000 = 9 \times 1111 + 1$$

ec.

Un numero formato da una cifra significativa seguita da un numero qualunque di zeri è uguale a un multiplo di 9 più la cifra significativa.

Abbiasi il numero 3000. Questo numero è uguale a $1000 + 1000 + 1000$; ma 1000 pareggia un multiplo di 9 più 1, dunque 3000 equivale alla somma di

un multiplo di $9 + 1$
un multiplo di $9 + 1$
un multiplo di $9 + 1$;

cioè equivale a un multiplo di $9 + 3$.

Un numero quaiunque è uguale a un multiplo di 9 *più la somma delle cifre.*

Abbiasi il numero 735. Questo numero è uguale a $700 + 30 + 5$; 700 equivale a un multiplo di 9 più 7, 30 equivale a un multiplo di 9 più 3; dunque 735 equivale alla somma di

un multiplo di $9 + 7$
un multiplo dí $9 + 3$
5;

cioè pareggia un multiplo di $9 + 7 + 3 + 5$.

Un numero che ha la somma delle sue cifre divisibile per 9, *è divisibile per* 9.

Abbiasi il numero 7236. Questo numero è uguale a un multiplo di 9 più la somma delle sue cifre, cioè più 18; 18 è un multiplo di 9; dunque la somma un multiplo di $9 + 18$, ovvero 7236, è un multiplo di 9 e quindi è divisibile per 9.

57. *Un numero che ha la somma delle sue cifre divisibile per* 3, *è divisibile per* 3.

Abbiasi il numero 8364. Questo numero è uguale a un multiplo di 9 più la somma delle sue cifre ch'è 21; un multiplo di 9 è pure multiplo di 3; 21 è multiplo di 3; dunque la somma un multiplo di $3 + 21$, ovvero 8364, è un multiplo di 3, ed è quindi divisibile per 3.

58. Un numero che non ha altri divisori che sè stesso e l'unità dicesi numero *primo.* 2, 3, 5, 7, 11, 13, sono numeri primi; 6 non è numero primo perchè è divisibile per 2.

59. *Un numero non primo può sempre risolversi in un prodotto di numeri primi.*

Abbiasi il numero 25480. Questo numero è divisibile per 2 (50); e si ha

$$25480 = 2 \times 12740.$$

12740 è divisibile per 2; e si ha

$$12740 = 2 \times 6370.$$

Quindi

$$25480 = 2 \times 2 \times 6370.$$

6370 è divisibile per 2, e si ha

$$6370 = 2 \times 3185;$$

quindi

$$25480 = 2 \times 2 \times 2 \times 3185.$$

3185, non è divisibile nè per 2 nè per 3, ma è divisibile per 5 (51), e si ha

$$3185 = 5 \times 637;$$

quindi

$$25480 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 637.$$

637 non è divisibile nè per 2, nè per 3, nè per 5, ma è divisibile per 7, e si ha

$$637 = 7 \times 91;$$

quindi

$$25480 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 7 \times 91,$$

91 è egualmente divisibile per 7, e si ha

$$91 = 7 \times 13;$$

quindi

$$25480 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 7 \times 7 \times 13.$$

13 è un numero primo; dunque 25480 è risoluto in un prodotto di fattori primi.
L' ultima eguaglianza si può scrivere

$$25480 = 2^3 \times 5 \times 7^2 \times 13.$$

L'operazione si dispone ordinariamente nel seguente modo:

2 5 4 8 0	2
1 2 7 4 0	2
6 3 7 0	2
3 1 8 5	5
6 3 7	7
9 1	7
1 3	13

60. Quando un numero si può facilmente decomporre in un prodotto di due fattori, val meglio risolvere ciascuno di questi fattori in un prodotto di numeri primi e poi formare un prodotto unico dei risultati. Così per esempio il numero 6300 è uguale a 63×100; $63 = 3^2 \times 7$; $100 = 2^2 \times 5^2$; quindi

$$6300 = 3^2 \times 7 \times 2^2 \times 5^2.$$

61. Un numero che divide esattamente molti altri si chiama il loro *divisore comune.* 7 è divisore comune di 21, 35, 63. Il maggiore fra i divisori comuni a più numeri si chiama *massimo comun divisore.*

62. *Il massimo comun divisore di più numeri tali che il minore di essi divide tutti gli altri è questo numero minore.*

Il massimo comun divisore dei numeri 63, 35, 21, 7, è 7. Infatti 7 li divide tutti e un numero maggiore di 7 potrebbe dividere 63, 35 e 21 ma non potrebbe dividere 7.

63. *Per cercare il massimo comun divisore di più numeri qualunque si risolvono in fattori primi e poi si forma il prodotto di tutti quelli che sono comuni ai numeri dati, ciascuno inalzato al minore esponente.*

Abbiansi i numeri 360, 900, 336. Risoluti in fattori primi col metodo esposto innanzi, si trova

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$$
$$900 = 2^2 \times 3^2 \times 5^2$$
$$336 = 2^4 \times 3 \times 7.$$

Il massimo comun divisore di questi numeri è $2^2 \times 3$, cioè 12. Infatti un divisore comune ai numeri dati deve esser composto di fattori primi comuni ai numeri proposti; ed è manifesto che il massimo comun divisore deve contenere tutti i fattori primi comuni. I fattori primi comuni ai numeri dati sono 2 e 3; e poichè vi sono due fattori 2 e un fattore 3 comune a tutti tre, il massimo comun divisore è $2^2 \times 3$.

64. Due numeri si dicono primi fra loro quando non hanno alcun fattore primo comune. Per esempio, 35 e 18 sono numeri primi fra loro; infatti 35 risoluto in fattori primi è uguale a 7×5, e 18 è uguale a $2 \times 3 \times 3$, e come si vede chiaramente questi due prodotti non hanno fattori primi comuni. Dire che due numeri non hanno fattori primi comuni torna lo stesso che dire che il loro massimo comun divisore è l' unità; dunque potremo dare un' altra definizione dei numeri primi fra loro, dicendo che sono quei numeri che hanno per massimo comun divisore l' unità.

65. Un numero divisibile per molti altri si dice *multiplo comune* a questi numeri. Così 72 è multiplo comune ai numeri 6, 9, 12, perchè è divisibile per ciascuno di essi. I multipli comuni a più numeri sono infiniti; infatti moltiplicando 72 successivamente pei numeri della serie 1, 2, 3, 4 ec., ottengo infiniti numeri, che sono tutti multipli comuni a 6, 9, 12. Fra i multipli comuni a più numeri, il più importante a considerare è il più piccolo di essi, che dicesi *minimo multiplo*.

66. *Il minimo multiplo di più numeri tali che il maggiore di essi è divisibile per tutti gli altri è questo numero maggiore.*

Il minimo multiplo dei numeri 6, 9, 27, 54 è 54. Infatti 54 è divisibile per ciascuno dei numeri dati ed è il più piccolo numero che sia divisibile per se stesso.

67. *Per cercare il minimo multiplo di più numeri, si risolvono in fattori primi, poi si forma il prodotto di tutti questi fattori ciascuno inalzato al maggiore esponente.*

Prenderemo per esempio i numeri 360, 900, 336 che abbiamo considerati innanzi. Un numero divisibile ad una volta per questi tre numeri deve contenere almeno quattro fattori 2, due fattori 3, due fattori 5, un fattore 7. Otterremo il minimo multiplo dei numeri proposti prendendo i soli fattori che abbiamo nominati, con che si avrà $2^4 \times 3^2 \times 5^2 \times 7$ che è uguale a 25200. Gli altri multipli comuni ai numeri dati si otterranno moltiplicando 25200 successivamente pei numeri 2, 3, 4 ec.

È chiaro che se i numeri dati sono primi fra loro, il minimo multiplo sarà dato dal loro prodotto. Così il minimo multiplo di 5, 7, 12 è $5 \times 7 \times 12$ o 420.

ESERCIZI.

I. Risolvere in fattori primi il numero 17640.

II. Trovare il massimo comun divisore e il minimo multiplo dei numeri 2520, 5292, 176400, 111132.

III. Il numero 1213 è primo?

IV. Il numero 3120 è divisibile per 3 e per 5; sarà divisibile per 15?

CAPITOLO VI.

FRAZIONI.

68. Si chiama *grandezza* tuttociò che può essere aumentato o diminuito: un arancio, una tavola, la larghezza di una strada, l' altezza di una casa, la lunghezza di un viale sono grandezze.

Se una grandezza contiene esattamente una seconda grandezza della stessa specie 2, 3 ec., volte, si dice che la prima grandezza è un *multiplo* della seconda, e che la seconda è una *parte aliquota* della prima.

Per giudicare quanto una grandezza è lunga, larga, alta, pesante ec., bisogna paragonarla ad un' altra della stessa specie che sia ben conosciuta. Così, per esempio, volendo formarci un' idea precisa dell' altezza di una casa, prenderemo una lunghezza determinata, e vedremo quante volte questa lunghezza è contenuta nell' altezza della casa; se vi è contenuta 15 volte, 15 è la *misura* di quest' altezza. Misurare dunque una grandezza significa cercare quante volte questa grandezza ne contiene un' altra della stessa specie.

69. La grandezza che serve a misurare tutte quelle della stessa specie, si chiama *unità*. Così per misurare le lunghezze, i Toscani prendono per unità una lunghezza determinata che chiamano *braccio;* per misurare il peso di un oggetto, prendono per unità un peso determinato che chiamano *libbra.*

Nel misurare una grandezza qualunque, per esempio una lunghezza, si possono presentare due casi:

1° Se la lunghezza data contiene esattamente l'unità, 8 volte per esempio, 8 è la misura della lunghezza, o in altre parole la lunghezza sarà rappresentata dal numero 8.

2° Se la lunghezza che si vuol misurare non contiene esattamente l'unità, potremo dividere quest' ultima in un certo numero di parti eguali, tali che una di esse sia contenuta un numero esatto di volte nella lunghezza data. Supponiamo per esempio che la settima parte dell' unità, o ciò ch'è lo stesso, un settimo dell' unità, sia contenuto 46 volte nella lunghezza proposta; diremo che la lunghezza è misurata dalla *frazione* 46 *settimi.*

Il risultato della misura di una grandezza si chiama *numero.*

Quando una grandezza è un multiplo dell' unità, il numero che la misura si dice un *numero intero*, o un *intero.* I numeri che abbiamo considerati sinora esclusivamente sono numeri interi.

Quando una grandezza è multipla di una certa parte aliquota dell' unità, il numero che la misura si dice un *numero frazionario* o *una frazione.*

Le grandezze, allorchè sono misurate o rappresentate da numeri, ricevono il nome di *quantità.*

70. Da quel che precede risulta che per formare una *frazione* bisogna dividere l'unità in un numero qualunque di parti eguali, e prendere una o più di queste parti. Il numero che indica in quante parti eguali si è divisa l'unità si chiama *denominatore;* il numero che indica quante parti se ne prendono dicesi *numeratore.* Il numeratore e il denominatore si chiamano anche i *termini* della frazione.

Per scrivere una frazione, si scrive il numeratore al disopra del suo denominatore, e si separano con una linea. Se per esempio l'unità è stata divisa in 18 parti, la riunione di 5 di queste parti si rappresenta con $\frac{5}{18}$.

Per enunciare una frazione, si legge prima il numeratore, e si aggiunge il nome del denominatore seguito dalla terminazione *esimo*. Così la frazione $\frac{5}{18}$ si legge *cinque diciottesimi*. Vi ha eccezione pei denominatori 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10; pei quali si dice *mezzo, terzo, quarto, quinto, sesto, settimo, ottavo, nono, decimo.*

71. Una frazione il cui numeratore è minore del denominatore è evidentemente minore dell'unità; così $\frac{3}{4}$ è un numero minore dell'unità, poichè delle quattro parti che compongono l'unità se ne sono prese solamente tre.

Una frazione i cui termini sono eguali, rappresentando una quantità formata col prendere tutte le parti nelle quali si è supposta divisa l'unità, è evidentemente pari all'unità stessa. Così le frazioni

$$\frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4}, \frac{5}{5}, \frac{6}{6} \text{ ec.}$$

sono forme diverse sotto le quali si può esprimere l'unità.

Una frazione il cui numeratore è maggiore del denominatore è evidentemente maggiore dell'unità. Così la frazione $\frac{15}{7}$ è maggiore dell'unità; poichè per formare la quantità rappresentata da $\frac{15}{7}$ non si son prese solamente le sette parti nelle quali è stata divisa l'uni-

tà, ma ne sono state prese 8 di più; dunque quindici settimi è maggiore di sette settimi, ovvero dell' unità.

72. *Se il numeratore di una frazione si moltiplica o si divide per un intero, la frazione è moltiplicata o divisa per questo numero.*

Dal Capitolo III sappiamo che un numero è doppio, triplo, quadruplo ec. di un altro, quando risulta dal prodotto di questo secondo numero rispettivamente per 2, 3, 4 ec. Ciò posto, supponiamo che la frazione data sia $\frac{5}{7}$; moltiplicando il numeratore per 2, la frazione $\frac{10}{7}$ che ne risulta è doppia della prima, ovvero è il prodotto di $\frac{5}{7}$ per 2. Infatti, poichè 10 *unità* sono il doppio di 5 *unità*, è evidente che 10 *settimi* sono il doppio di 5 *settimi*. Del pari si vedrebbe che $\frac{15}{7}$ è il triplo di $\frac{5}{7}$, $\frac{20}{7}$ il quadruplo ec. Laonde *per moltiplicare una frazione per un intero, si moltiplica il numeratore per questo intero.*

Poichè $\frac{10}{7}$ è il prodotto di $\frac{5}{7}$ per 2, è chiaro che $\frac{5}{7}$ è il quoziente di $\frac{10}{7}$ diviso per 2. Dunque *per dividere una frazione per un intero si divide il numeratore per questo intero.* Questa regola suppone che il numeratore sia divisibile per l' intero, e quindi non è applicabile quando questa condizione non si verifica.

73. *Se il denominatore di una frazione si moltiplica o si divide per un intero, la frazione è divisa o moltiplicata per questo intero.*

Abbiasi la frazione $\frac{4}{15}$; dividendo il denominatore

per 3, la frazione $\frac{4}{5}$ che ne risulta è il triplo di $\frac{4}{15}$, ovvero è il prodotto di $\frac{4}{15}$ per 3.

Infatti per dividere l'unità in 15 parti eguali, basta evidentemente dividerla prima in 5 parti eguali, poi dividere ciascuna di queste 5 parti in 3 parti eguali; laonde un quinto contiene 3 volte un quindicesimo, ovvero è il triplo di un quindicesimo; per conseguenza quattro quinti sono il triplo di quattro quindicesimi. Possiamo dunque dire che *per moltiplicare una frazione per un intero si può dividere il denominatore per l'intero.* Questa regola suppone che il denominatore sia divisibile per l'intero, e quindi non è applicabile tutte le volte che questa condizione non si verifica. La regola che abbiamo data innanzi (72) è generale, qualunque siano i termini della frazione.

Poichè $\frac{4}{5}$ è il triplo di $\frac{4}{15}$; è chiaro che $\frac{4}{15}$ sarà la terza parte di $\frac{4}{5}$, cioè sarà il quoziente della divisione di $\frac{4}{5}$ per 3. Onde *per dividere una frazione per un intero si moltiplica il denominatore per l'intero.* Questa regola è evidentemente applicabile qualunque sieno i termini della frazione.

74. *Il valore di una frazione non varia moltiplicando o dividendo i suoi due termini per uno stesso numero intero.*

Sia data la frazione $\frac{2}{7}$; moltiplicando il numeratore per 3, si ottiene la frazione $\frac{6}{7}$; e moltiplicando il denominatore di quest'ultima per 3, si ha la frazione $\frac{6}{21}$. Per

ciò che abbiamo detto innanzi è chiaro che tanto $\frac{2}{7}$ quanto $\frac{6}{21}$ sono la terza parte di $\frac{6}{7}$, dunque $\frac{2}{7}$ è uguale a $\frac{6}{21}$.

Del pari si proverebbe che non si altera il valore di una frazione dividendo il numeratore e il denominatore per uno stesso numero.

75. *Il prodotto di una frazione pel suo denominatore è uguale al numeratore.* Si abbia la frazione $\frac{2}{3}$; per moltiplicare $\frac{2}{3}$ per 3 sappiamo (73) che basta dividere il denominatore per 3; quindi il prodotto è $\frac{2}{1}$ ovvero 2.

76. Una frazione che non abbia i suoi termini primi fra loro si può sempre ridurre sotto forma più semplice, dividendo il numeratore e il denominatore pei divisori comuni ad entrambi. Vogliasi ridurre a più semplice espressione la frazione $\frac{720}{1620}$. Dividendo i termini di questa frazione successivamente, prima per 10, poi per 2 e finalmente per 9, le frazioni $\frac{72}{162}$, $\frac{36}{81}$, $\frac{4}{9}$ che risultano da queste divisioni, sono tutte eguali fra loro e alla frazione data. La frazione $\frac{4}{9}$ avendo i suoi due termini primi fra loro, non può ridursi a più semplice espressione con questo metodo.

Potremo ottenere la frazione $\frac{4}{9}$ più speditamente nel seguente modo.

Cerchiamo il massimo comun divisore di 720 e di 1620: si ha

$$720 = 2^4 \times 3^2 \times 5, \quad 1620 = 2^2 \times 3^4 \times 5;$$

il massimo comun divisore è (63)

$$2^2 \times 3^2 \times 5 = 180.$$

Dividendo il numeratore e il denominatore della frazione $\frac{720}{1620}$ per 180 si trova $\frac{4}{9}$.

Dunque *una frazione si riduce ad avere i suoi termini primi tra loro, dividendoli pel loro massimo comun divisore.*

77. Riduzione di due o più frazioni allo stesso denominatore. Ridurre due o più frazioni allo stesso denominatore, significa trovare altre frazioni, rispettivamente eguali alle prime, e che abbiano uno stesso denominatore.

Consideriamo prima due frazioni $\frac{3}{7}$ e $\frac{5}{9}$. Moltiplichiamo i termini della prima frazione per 9 e i termini della seconda per 7; è chiaro che le due frazioni

$$\frac{3 \times 9}{7 \times 9} = \frac{27}{63}, \quad \frac{5 \times 7}{9 \times 7} = \frac{35}{63},$$

sono rispettivamente eguali a $\frac{3}{7}$ e $\frac{5}{9}$ e hanno lo stesso denominatore 63.

Dunque: *per ridurre due frazioni allo stesso denominatore, basta moltiplicare i due termini di ciascuna di esse pel denominatore dell' altra.*

Sia proposto ridurre allo stesso denominatore le fra-

zioni $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{9}$. Moltiplichiamo i termini della prima frazione pel prodotto 7×9, i termini della seconda pel prodotto 3×9, i termini della terza pel prodotto 3×7; le nuove frazioni

$$\frac{2 \times 7 \times 9}{3 \times 7 \times 9}, \frac{4 \times 3 \times 9}{7 \times 3 \times 9}, \frac{5 \times 3 \times 7}{9 \times 3 \times 7}$$

sono rispettivamente eguali alle date. Effettuando le moltiplicazioni, si trovano le frazioni

$$\frac{126}{189}, \frac{108}{189}, \frac{105}{189},$$

che hanno lo stesso denominatore.

78. Osservazione. Affinchè i risultati riescano meno complicati, è utile, prima di procedere all'applicazione della regola, di ridurre ciascuna frazione ad avere i suoi due termini primi tra loro.

79. La riduzione delle frazioni allo stesso denominatore dà un mezzo facile per riconoscere il valore relativo di due o più frazioni. Se, per esempio, le frazioni date sono $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{9}$; si ridurranno prima allo stesso denominatore, e poichè delle tre nuove frazioni $\frac{126}{189}$, $\frac{108}{189}$, $\frac{105}{189}$, la prima è la maggiore, l'ultima è la minore, ne segue che delle frazioni proposte $\frac{2}{3}$ è la maggiore, $\frac{5}{9}$ la minore.

80. Quando i denominatori delle frazioni date non sono numeri primi fra loro, la riduzione allo stesso denominatore può conseguirsi con un metodo più com-

plicato di quello indicato di sopra, ma che conduce a risultati più semplici.

Operando come innanzi, il denominatore comune delle frazioni ridotte è un multiplo dei denominatori delle frazioni proposte; così nell'esempio dato innanzi, 189 è un multiplo di 3, 7, 9. Si otterranno risultati più semplici prendendo per denominatore comune il minimo multiplo dei denominatori delle frazioni date, invece di prendere il multiplo formato dal prodotto dei denominatori. Così, nello stesso esempio di sopra, il minimo multiplo di 3, 7, 9 è 63; se dunque dividiamo 63 per 3, per 7, per 9 e moltiplichiamo i quozienti 21, 9, 7 rispettivamente pei termini di $\frac{2}{3}, \frac{4}{7}, \frac{5}{9}$; le nuove frazioni $\frac{42}{63}, \frac{36}{63}, \frac{35}{63}$ hanno lo stesso denominatore e sono più semplici delle frazioni $\frac{126}{189}, \frac{108}{189}, \frac{105}{189}$ che abbiamo trovate col metodo precedente.

Quando i denominatori delle frazioni date sono numeri primi fra loro, il minimo multiplo di questi denominatori è uguale al loro prodotto (67); laonde potremo dare per regola generale, qualunque siano i denominatori, la seguente:

Per ridurre più frazioni allo stesso denominatore, si cerca il minimo multiplo dei denominatori delle frazioni ridotte e si moltiplicano i due termini di ciascuna di esse per il numero di volte che il suo denominatore è contenuto nel minimo multiplo.

Esempio I. Abbiansi le frazioni

$$\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{12}, \frac{7}{24}.$$

Il denominatore 24 dell' ultima frazione è divisi-

bile per ciascuno degli altri denominatori; 24 è dunque il minimo multiplo di tutti i denominatori. Dividendo 24 per questi denominatori, si trovano i quozienti

$$8, \quad 6, \quad 2, \quad 1;$$

questi sono i numeri pei quali bisogna moltiplicare rispettivamente i due termini delle frazioni proposte. Eseguendo i calcoli, si trova

$$\frac{16}{24}, \quad \frac{18}{24}, \quad \frac{10}{24}, \quad \frac{7}{24}.$$

Esempio II. Abbiansi le frazioni

$$\frac{113}{360}, \quad \frac{317}{540}, \quad \frac{229}{648}.$$

Per avere il minimo multiplo comune ai tre denominatori, risolveremo ciascuno di essi in fattori primi; avremo

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$$
$$540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$$
$$648 = 2^3 \times 3^4$$

Il minimo multiplo comune a questi numeri è (67)

$$2^3 \times 3^4 \times 5 = 3240;$$

dividendolo per ciascuno dei denominatori, si trovano i quozienti rispettivi

$$9, \quad 6, \quad 5.$$

Questi sono i numeri pei quali bisogna moltiplicare rispettivamente i due termini delle frazioni proposte. Eseguendo i calcoli si trova

$$\frac{1017}{3240}, \quad \frac{1902}{3240}, \quad \frac{1145}{3240}.$$

81. ADDIZIONE. *L'addizione, in generale, è un' operazione che ha per oggetto di riunire in un sol numero tutte le unità e parti di unità contenute in più numeri dati.*

Il risultato dell'operazione si chiama *somma.*

Supponiamo in prima di dover fare l' addizione delle frazioni $\frac{2}{15}$, $\frac{7}{15}$, $\frac{4}{15}$ che hanno lo stesso denominatore. Poichè la somma di 2 *unità*, 7 *unità*, 4 *unità*, è 13 *unità*, ne segue evidentemente che la somma di 2 *quindicesimi*, 7 *quindicesimi*, 4 *quindicesimi* è 13 *quindicesimi*, ovvero $\frac{13}{15}$. Dunque:

Per sommare più frazioni che hanno lo stesso denominatore, si sommano i numeratori e al risultato si dà il denominatore comune.

Se le frazioni proposte sono qualunque, si riducono prima allo stesso denominatore e poi si applica la regola precedente.

ESEMPIO. Sia proposto di sommare le frazioni $\frac{1}{12}$, $\frac{3}{20}$, $\frac{2}{3}$. Riducendo allo stesso denominatore queste frazioni (80) si trova $\frac{5}{60}$, $\frac{9}{60}$, $\frac{40}{60}$; la cui somma è $\frac{54}{60}$.

82. *Un numero composto di un intero più una frazione si può sempre ridurre sotto forma di frazione, aggiungendo al numeratore della frazione data il prodotto del suo denominatore per l' intero.*

Abbiasi il numero $5+\frac{3}{7}$. Una unità contiene 7 settimi, quindi 5 unità contengono 5 volte 7 settimi, cioè 35 settimi: $\frac{35}{7}+\frac{3}{7}$ è eguale a $\frac{38}{7}$. Dunque $5+\frac{3}{7}=\frac{38}{7}$.

Reciprocamente una frazione che ha il numeratore maggiore del denominatore può sempre scriversi sotto forma di un intero più una frazione; ciò che dicèsi *estrarre gl' interi* da una frazione. Infatti, abbiasi la frazione $\frac{56}{9}$; dividendo 56 per 9 si trova 6 per quoziente e 2 per resto; dunque $56 = 9 \times 6 + 2$, (40); e per conseguenza

$$\frac{56}{9} = \frac{9 \times 6 + 2}{9} = \frac{9 \times 6}{9} + \frac{2}{9} = 6 + \frac{2}{9}.$$

Laonde una frazione maggiore dell' unità è uguale al quoziente della divisione del numeratore pel denominatore, più una frazione che ha per numeratore il resto e per denominatore quello della frazione data.

83. Siano da sommare i tre numeri $2 + \frac{5}{7}$, $3 + \frac{4}{9}$, $5 + \frac{2}{3}$. Si potrebbero ridurre questi tre numeri a frazioni e poi fare l' addizione; ma è meglio procedere nel seguente modo. La somma degl' interi è $2 + 3 + 5$ o 10; la somma delle frazioni è $\frac{5}{7} + \frac{4}{9} + \frac{2}{3}$ o $\frac{115}{63} = 1 + \frac{52}{63}$; per conseguenza la somma richiesta è $10 + 1 + \frac{52}{63}$ o $11 + \frac{52}{63}$. Dunque:

Per sommare più numeri composti di una parte intera e di una frazione, si fa l' addizione degl' interi, poi quella delle frazioni, e si riuniscono in ultimo le due somme.

84. Sottrazione. *La sottrazione, in generale, è un' operazione che ha per oggetto di togliere da un*

numero dato tutte le unità e parti d' unità contenute in un secondo numero dato.

Il risultato dell' operazione si dice *resto* o *differenza.*

Sia da sottrarre $\frac{4}{11}$ da $\frac{9}{11}$. Poichè 4 *unità* tolte da 9 *unità* danno per resto 5 *unità*, ne segue evidentemente che 4 *undicesimi* tolti da 9 *undicesimi* danno per resto 5 *undicesimi*. Dunque

$$\frac{9}{11}-\frac{4}{11}=\frac{9-4}{11}=\frac{5}{11}.$$

Per fare la sottrazione di due frazioni che hanno lo stesso denominatore, si sottraggono i numeratori e alla differenza si dà il denominatore comune.

Se le frazioni proposte sono qualunque, si riducono prima allo stesso denominatore e poi si applica la regola precedente.

Esempio. Proponiamoci di sottrarre $\frac{3}{7}$ da $\frac{8}{9}$. Queste frazioni ridotte allo stesso denominatore danno $\frac{27}{63}$ e $\frac{56}{63}$; dunque la differenza richiesta è $\frac{56-27}{63}$ o $\frac{29}{63}$.

85. Debbasi sottrarre $7+\frac{4}{9}$ da $15+\frac{7}{8}$. Se si toglie 7 da 15, e $\frac{4}{9}$ da $\frac{7}{8}$, i resti parziali 8 e $\frac{31}{72}$ sommati insieme danno la differenza cercata, ch' è quindi $8+\frac{31}{72}$.

Talchè: *Per fare la sottrazione di due numeri composti di una parte intera e d' una frazione, si fa la sottrazione degl' interi, poi quella delle frazioni, e si riuniscono in ultimo le differenze.*

Questa regola sembra non potersi applicare tutte le volte che la frazione del numero che si sottrae sia maggiore della frazione dell'altro numero, come per esempio se si dovesse sottrarre $5+\frac{11}{15}$ da $18+\frac{2}{5}$, o ciò ch'è lo stesso $5+\frac{11}{15}$ da $18+\frac{6}{15}$. Questa difficoltà si toglie facilmente. Le 18 unità del numero maggiore equivalgono a 17 unità più $\frac{15}{15}$; quindi $18+\frac{6}{15}$ equivale a $17+\frac{21}{15}$; per conseguenza bisognerà sottrarre $5+\frac{11}{15}$ da $17+\frac{21}{15}$; il resto è $12+\frac{10}{15}$.

86. Moltiplicazione. Nella moltiplicazione si distinguono tre casi:

1° *Moltiplicazione di una frazione per un numero intero.* Dal Capitolo III (21) sappiamo che moltiplicare un numero per un altro, significa formare un nuovo numero composto di tante parti eguali al primo quante unità vi sono nel secondo. Questa definizione è indipendente dalla natura del moltiplicando, e quindi si applica anche al caso in cui il moltiplicando sia frazionario.

Debbasi moltiplicare $\frac{3}{5}$ per 4. Bisogna cercare un numero composto di quattro parti eguali a $\frac{3}{5}$; questo numero è $\frac{3}{5}+\frac{3}{5}+\frac{3}{5}+\frac{3}{5}$, cioè $\frac{3\times 4}{5}$.

Dunque *per moltiplicare una frazione per un intero si moltiplica il numeratore della frazione per l'intero.* Lo che concorda con ciò che abbiamo dimostrato innanzi (72).

2° *Moltiplicazione di una frazione per una fra-*

zione. Per questo secondo caso la definizione del numero (21) non è più applicabile; e se ne richiede una nuova.

Moltiplicare un numero qualunque per una frazione, significa dividere questo numero in tante parti eguali quante unità vi sono nel denominatore della frazione e prendere tante di queste parti quante unità vi sono nel suo numeratore.

Così moltiplicare $\frac{5}{7}$ per $\frac{3}{4}$ significa dividere $\frac{5}{7}$ in 4 parti eguali e prendere 3 di queste parti, cioè prendere il *quarto* di $\frac{5}{7}$ e ripeterlo 3 volte, lo che equivale a prendere *tre quarti* di $\frac{5}{7}$.

Il numero che si moltiplica si chiama *moltiplicando*, il numero pel quale si moltiplica si dice *moltiplicatore* e il risultato dell'operazione *prodotto.*

Per moltiplicare due frazioni bisogna moltiplicare numeratore per numeratore e denominatore per denominatore.

Sia infatti da moltiplicare $\frac{4}{9}$ per $\frac{5}{11}$. Secondo la definizione bisogna dividere $\frac{4}{9}$ in 11 parti eguali, cioè dividerlo per 11 e ripetere il risultato 5 volte. Ora per dividere $\frac{4}{9}$ per 11 bisogna moltiplicare il denominatore di $\frac{4}{9}$ per 11; il risultato $\frac{4}{9 \times 11}$, dev'essere ripetuto 5 volte, cioè dev'esser moltiplicato per 5: il prodotto cercato è dunque $\frac{4 \times 5}{9 \times 11}$.

3° *Moltiplicazione di un intero per una frazione.* Questo caso si riduce al precedente osservando che un

numero intero è uguale a una frazione che ha per numeratore questo intero e per denominatore l'unità. Così moltiplicare 8 per $\frac{3}{7}$ è lo stesso che moltiplicare le due frazioni $\frac{8}{1}$ e $\frac{3}{7}$; il prodotto è $\frac{24}{7}$.

87. Sia da moltiplicare $8+\frac{4}{9}$ per $5+\frac{2}{7}$. Si ha (82)

$$8+\frac{4}{9}=\frac{76}{9}.$$

$$5+\frac{2}{7}=\frac{37}{7},$$

Quindi il prodotto dei numeri proposti è lo stesso di quello delle frazioni $\frac{76}{9}$ e $\frac{37}{7}$, ovvero è eguale a

$$\frac{76\times37}{9\times7}=\frac{2812}{63}=44+\frac{40}{63}.$$

88. Divisione. Dal Capitolo IV (37) sappiamo che dividere un numero per un altro significa trovare un terzo numero che moltiplicato pel secondo riproduca il primo; il primo numero si dice *dividendo*, il secondo *divisore*, il risultato *quoziente*. Queste definizioni sono evidentemente indipendenti dalla natura del dividendo e del divisore, e quindi sono applicabili anche al caso in cui l'uno o l'altro o entrambi siano numeri frazionari.

Nella divisione si distinguono tre casi:

1° *Dividere una frazione per una frazione.*

Per dividere una frazione per un'altra basta moltiplicare la frazione dividendo per la frazione divisore rovesciata.

Sia da dividere $\frac{7}{8}$ per $\frac{3}{5}$; il quoziente è $\frac{7\times5}{8\times3}$. Per provarlo, moltiplichiamo $\frac{7\times5}{8\times3}$ per $\frac{3}{5}$; dovremo ottenere per prodotto $\frac{7}{8}$. Ora si ha

$$\frac{7\times5}{8\times3}\times\frac{3}{5}=\frac{7\times5\times3}{8\times3\times5};$$

i fattori 3 e 5 essendo comuni al numeratore e al denominatore, possono essere soppressi; laonde

$$\frac{7\times5}{8\times3}\times\frac{3}{5}=\frac{7\times5\times3}{8\times3\times5}=\frac{7}{8}.$$

2° *Dividere una frazione per un intero.* Sia da dividere $\frac{2}{7}$ per 5. Il quoziente che si cerca è uguale a quello di $\frac{2}{7}$ diviso per $\frac{5}{1}$, cioè è uguale (caso precedente) a $\frac{2}{7}\times\frac{1}{5}$, o a $\frac{2}{7\times5}$. Dunque:

Per dividere una frazione per un intero si moltiplica il denominatore per l'intero. Lo che concorda con quanto è stato dimostrato innanzi (73).

3° *Dividere un intero per una frazione.* Debbasi dividere 9 per $\frac{4}{11}$. Il quoziente che si cerca è eguale a quello della divisione di $\frac{9}{1}$ per $\frac{4}{11}$, cioè è uguale (1° caso) a $\frac{9}{1}\times\frac{11}{4}$ o a $\frac{9\times11}{4}$. Dunque:

Per dividere un intero per una frazione si moltiplica l'intero per la frazione rovesciata.

89. Sia da dividere $4+\frac{8}{11}$ per $7+\frac{5}{12}$; Si ha (79)

$$4+\frac{8}{11}=\frac{52}{11}$$

$$7+\frac{5}{12}=\frac{89}{12}.$$

Quindi il quoziente della divisione proposta è lo stesso del quoziente della divisione di $\frac{52}{11}$ per $\frac{89}{12}$, cioè è uguale a

$$\frac{52\times 12}{11\times 89}=\frac{624}{979}.$$

90. *Una frazione è uguale al quoziente della divisione del suo numeratore pel suo denominatore.*

Infatti il quoziente della divisione di due numeri interi, 35 e 8 per esempio, è $\frac{35}{8}$, poichè $\frac{35}{8}$ moltiplicato per 8 dà per prodotto 35. $\frac{35}{8}$ si chiama *quoziente completo* della divisione di 35 per 8, affine di distinguerlo dal quoziente 4 che si ottiene col metodo del Capitolo IV e che ha ricevuto il nome di *quoziente intero.* Ora sappiamo che (79)

$$\frac{35}{8}=4+\frac{3}{8};$$

dunque *il quoziente completo di una divisione è uguale al quoziente intero più una frazione che ha per numeratore il resto e per denominatore il divisore.*

91. *Il quoziente di una divisione qualunque indica quante volte il dividendo contiene il divisore e quante parti del divisore.* Il quoziente può essere intero, frazionario, o un intero più una frazione. Se il quoziente è un intero, 6 per esempio, il divisore ripetuto 6 volte dà il dividendo: dunque il dividendo contiene 6 volte il divisore. Se il quoziente è una frazione, $\frac{7}{8}$ per esempio, i $\frac{7}{8}$ del divisore debbono dare il dividendo: dunque il dividendo contiene sette volte l'ottava parte del divisore. Se finalmente il quoziente è un intero più una frazione, $5+\frac{3}{7}$ per esempio, il dividendo contiene cinque volte il divisore più tre volte la settima parte del divisore.

ESERCIZI.

I. Qual è il costo di braccia 18 e $\frac{2}{3}$ di una stoffa, sapendo che un braccio della stessa vale 12 lire?

II. Con 437 lire si sono comprate braccia 21 e $\frac{4}{5}$ di panno; quanto costa un braccio dello stesso panno?

III. Quanto panno di 23 lire e mezzo il braccio potremo comprare con 459 lire e $\frac{3}{7}$?

IV. Il diametro della Luna è i $\frac{32}{114}$ di quello della Terra; qual'è la lunghezza in metri del diametro della Luna?

V. 100 parti di polvere da guerra contengono 75 parti

di salnitro, 12 parti e mezzo di carbone e 12 parti e mezzo di solfo. Quanto salnitro, carbone e solfo sono contenuti in 35 libbre di polvere?

VI. La luce impiega 8 minuti e $\frac{3}{10}$ di minuto per venire dal Sole alla Terra; quanti metri percorrerà in 1 secondo?

VII. Lo schiacciamento della Terra che parte è del raggio maggiore terrestre? (Vedi *Esercizio* V, Capitolo II.)

VIII. Si abbiano tre lamine, una di rame, una di piombo e l'altra di stagno, di eguale larghezza e spessezza alla temperatura di 0 grado. Immaginiamole saldate insieme estremità con estremità, e supponiamo che a questa temperatura, la prima lamina abbia una lunghezza di 37 centimetri, la seconda di 49 centimetri e la terza di 14 centimetri. Eleviamo tutta la lamina alla temperatura di 100 gradi, ch'è quella dell'acqua bollente, si domanda quale sarà allora la sua lunghezza? Si suppone conosciuto che quando la temperatura aumenta da 0 a 100 gradi una lamina di rame si allunga di $\frac{1}{582}$ della sua lunghezza a 0 grado, una lamina di piombo di $\frac{1}{356}$, e una lamina di stagno $\frac{1}{462}$.

IX. Si ha una lamina formata di due altre saldate insieme estremità con estremità, una di piombo, l'altra di stagno; la porzione di piombo ha 45 centimetri di lunghezza alla temperatura di 0 grado, e la lamina totale ha 95 centimetri alla temperatura di 10 gradi. Qual è la lunghezza della porzione di stagno della lamina a 0 grado?

CAPITOLO VII.

NUMERI DECIMALI.

92. Dividiamo l' unità in dieci parti eguali, avremo dieci *decimi;* dividiamo un decimo in dieci parti eguali avremo dieci *centesimi* (poichè la decima parte di un decimo è un centesimo); la divisione del centesimo in dieci parti eguali produce i *millesimi* e così via discorrendo. Un numero composto di unità, decimi, centesimi, millesimi ec., si chiama *numero o frazione decimale;* un numero decimale puo contenere dunque una *parte intera* e una *parte decimale.* Le cifre che compongono la parte decimale di un numero decimale, sono dette *cifre decimali,* o semplicemente *decimali.*

93. Per scrivere i numeri decimali, si scrive prima la parte intera, poi si pone alla destra della cifra delle unità la cifra che esprime i decimi, poi alla destra di quest' ultima la cifra che esprime i centesimi e così di seguito. Per distinguere la parte intera dalla parte decimale si pone una virgola alla destra della cifra delle unità. Se non vi è parte intera vi si supplisce con uno zero.

Esempio. Un numero decimale che contiene 45 unità, 7 decimi, 4 centesimi, 9 millesimi, 2 diecimillesimi, 5 centomillesimi si scrive 45,74925. Un numero che contiene 8 centesimi si scrive 0,08.

94. *Un numero decimale scritto si legge enunciando prima la parte intera se ne ha; poi la parte decimale come se fosse un numero intero, indicando l' or-*

dine decimale delle unità che esprime la sua ultima cifra.

Esempio. Il numero 4,37598 si legge: *quattro unità, trentasettemila cinquecento novantotto centomilesimi.*

Osservando che 1 unità equivale a 10 decimi, 100 centesimi ec., 100000 centomilesimi, il numero precedente può leggersi come un numero intero, nel seguente modo: *quattrocentotrentasettemila cinquecentonovantotto centomilesimi.*

Quando un numero decimale ha molte cifre, si usa decomporre la parte decimale in classi di tre in tre, a cominciare dalla sinistra; l'ultima classe può avere una o due cifre. Ciò posto, si enuncia prima la parte intera, poi ciascuna classe succesivamente, indicando l'ordine decimale delle unità rappresentate dalla sua ultima cifra.

Esempio. Il numero 3,59273826974 si legge: 3 *unità,* 592 *millesimi,* 738 *milionesimi,* 269 *bilionesimi,* 74 *centobilionesimi.*

95. *Un numero decimale non cambia valore scrivendo uno o più zeri alla sua destra.*

Abbiasi il numero 0,7; aggiungiamo alla destra di 7 tre zeri; il numero 0,7000 è uguale a 0,7. Infatti 1 *decimo* è uguale a 1000 *diecimilesimi,* quindi 7 *decimi* equivalgono a 7000 *diecimilesimi.*

96. *Un numero decimale si moltiplica o si divide per* 10, 100, 1000 ec., *trasportando la virgola di* 1, 2, 3, ec. *posti verso la destra o verso la sinistra.*

Abbiasi il numero 538,7369; il prodotto di questo numero per 1000 è 538736,9. Infatti la cifra 9 che esprimeva diecimilesimi, esprime ora decimi, cioè ha acquistato un valore 1000 volte maggiore; la cifra 6 che esprimeva millesimi esprime ora unità, cioè ha acquistato un valore 1000 volte maggiore, e via discorrendo. Poichè dunque ciascuna cifra del numero proposto ha

acquistato un valore 1000 volte maggiore, tutto il numero sarà divenuto 1000 volte più grande, cioè sarà stato moltiplicato per 1000. Un ragionamento analogo proverebbe che 538,7369 è il quoziente della divisione di 538736,9 per 1000.

Talvolta il numero che si vuol moltiplicare o dividere per 10, 100, 1000 ec., non contiene nella sua parte decimale o nella sua parte intera tante cifre quante se ne richiedono per eseguire lo spostamento della virgola; in questi casi bisogna aggiungere un sufficiente numero di zeri alla destra della parte decimale o alla sinistra della parte intera.

Esempio. Si voglia dividere per 1000 il numero 8,42. Questo numero equivale a 0008,42; il quoziente di quest' ultimo numero per 1000 è 0,00842. Se il numero proposto si vuole moltiplicare per 10000, si osserverà che 8,42 è uguale a 8,42000; trasportando la virgola di quattro posti verso la destra, si ha per prodotto 84200,0 o più semplicemente 84200.

97. Riduzione di un numero decimale in frazione ordinaria.

Abbiasi il numero 8,3847, la cui ultima cifra esprime diecimillesimi. Questo numero contiene 83847 diecimillesimi, ed è quindi eguale ad una frazione che ha per numeratore 83847 e per denominatore 10000; laonde si ha

$$8,3847 = \frac{83847}{10000}.$$

In generale, *per ridurre un numero decimale in frazione ordinaria, si sopprime la virgola e si divide il risultato per l'unità seguita da tanti zeri quante cifre decimali contiene il numero proposto.*

Esempio. $0,00285 = \frac{285}{100000}$.

Reciprocamente, *per scrivere sotto forma di numero decimale una frazione che ha per denominatore l' unità seguita da un certo numero di zeri, basta scrivere il numeratore e separare con una virgola tante cifre decimali quanti zeri vi sono nel denominatore.* Se il numeratore non ha un numero sufficiente di cifre, si scriveranno alla sua sinistra più zeri, i quali, senza alterarne il valore, rendono posibile l' operazione.

Esempio. $\frac{7}{1000} = 0{,}007.$

Dal detto innanzi apparisce che un numero decimale può definirsi una frazione che ha per denominatore l' unità seguita da più zeri.

98. Addizione. La regola che abbiamo data (13) per l' addizione dei numeri interi si applica esattamente ai numeri decimali, colla sola avvertenza di disporre i numeri dati in modo che le virgole si corrispondano in colonna e di porre nella somma una virgola nel posto indicato dalle virgole dei numeri proposti.

Esempio. Si debbano sommare i numeri 5,874, 0,92, 12,004.

L' operazione si dispone nel modo seguente:

$$\begin{array}{r} 5{,}874 \\ 0{,}92 \\ 12{,}004 \\ \hline 18{,}798 \end{array}$$

La somma cercata è 18,798.

99. Sottrazione. La regola che abbiamo data (18) per la sottrazione dei numeri interi si applica esattamente a quella dei numeri decimali, colla sola avvertenza di disporre i numeri in modo che le virgole si

corrispondano. Se le parti decimali dei numeri dati non hanno un egual numero di cifre, bisogna renderle eguali aggiungendo alla destra di quella che ne contiene meno uno o più zeri.

Esempio. Sia da sottrarre 7,3849 da 15, 25.

L'operazione si dispone nel modo seguente:

$$\begin{array}{r} 15,2500 \\ 7,3849 \\ \hline 7,8651 \end{array}$$

La differenza cercata è 7,8651.

100. Moltiplicazione. Nella moltiplicazione dei numeri decimali bisogna distinguere due casi:

1° *Moltiplicazione di un numero decimale per un intero.* Sia da moltiplicare 5,96 per 42. Il moltiplicando equivale a $\frac{596}{100}$; il prodotto di questa frazione per 42 è (86) $\frac{596 \times 42}{100} = \frac{25032}{100} = 250,32$.

Dunque, *per moltiplicare un numero decimale per un intero, si moltiplica il moltiplicando pel moltiplicatore, facendo astrazione dalla virgola, e si separano alla destra del prodotto tante cifre decimali quante ne contiene il moltiplicando.*

2° *Moltiplicazione di due numeri decimali.* Sia proposto di moltiplicare 3,574 per 0,0008. La moltiplicazione di questi due numeri si riduce a quella delle due frazioni ordinarie $\frac{3574}{1000}$, $\frac{8}{10000}$, il cui prodotto è $\frac{3574 \times 8}{1000 \times 10000} = \frac{28592}{10000000} = 0,0028592$.

Dunque, *per moltiplicare fra loro due numeri decimali, si effettua il prodotto astrazion fatta dalle vir-*

gole, e si separano alla destra del risultato tante cifre decimali quante ne contengono i due numeri dati.

Esempio. Sia da moltiplicare 3,0047 per 9,742

L'operazione si dispone nel seguente modo:

```
       3,0 0 4 7
       9,7 4 2
     -----------
       6 0 0 9 4
     1 2 0 1 8 8
   2 1 0 3 2 9
 2 7 0 4 2 3
 ---------------
 2 9,2 7 1 7 8 7 4
```

Il prodotto cercato è 29,2717874.

101. Divisione. Nella divisione dei numeri decimali si distinguono due casi;

1° ***Divisione di un numero decimale per un intero.*** Debbasi dividere 41,3687 per 15. La divisione proposta si riduce a quella di 413687 diecimilesimi per 15; cioè si riduce a cercare la quindicesima parte (39) di 413687 diecimilesimi. La quindicesima parte di 413687 *unità* è 27579 *unità* più $\frac{2}{15}$ di *unità;* quindi la quindicesima parte di 413687 *diecimilesimi* è 27579 *diecimilesimi* più $\frac{2}{15}$ di *diecimilesimo,* cioè è uguale a $2,7579+\frac{2}{150000}$.

Dunque, *per dividere un numero decimale per un numero intero, si effettua la divisione come se il dividendo fosse intero, e si separano alla destra del quoziente tante cifre decimali quante ne contiene il dividendo. Per avere il quoziente esatto, bisogna aggiungere al numero decimale così ottenuto, una frazione avente per numeratore il resto della divisione fatta e per denominatore il divisore seguito da tanti zeri quante cifre decimali contiene il dividendo.*

ESEMPIO. Sia proposto dividere 78,314 per 57. L'operazione si dispone nel modo seguente:

```
7 8,3 1 4  | 5 7
2 1 3      |------------------
  4 2 1    | 1,3 7 3 + 53/57000
    2 2 4
      5 3
```

Il quoziente cercato è $1{,}373 + \frac{53}{57000}$.

2° *Divisione di un numero intero o decimale per un numero decimale.* Debbasi dividere 2,2357 per 0,059. Il divisore 0,059 è uguale alla frazione $\frac{59}{1000}$; si avrà dunque il quoziente richiesto moltiplicando (88) 2,2357 per $\frac{1000}{59}$, cioè moltiplicando 2,2357 per 1000 e dividendo il risultato 2235,7 per 59. Operando secondo la regola precedente si trova per quoziente completo $37{,}8 + \frac{55}{590}$.

Dunque, ***per dividere un numero intero o decimale per un numero decimale, si sopprime la virgola nel divisore, si moltiplica il dividendo per l'unità seguita da tanti zeri quante sono le cifre decimali del divisore e poi si applica la regola precedente.***

102. RIDUZIONE DELLE FRAZIONI ORDINARIE IN DECIMALI. Si voglia ridurre in decimali la frazione ordinaria $\frac{47}{20}$. Questa frazione equivale (90) al quoziente della divisione di 47 per 20; quindi si tratta di valutare in decimali questo quoziente. 47 unità equivalgono a 47,000 . . . .; laonde possiamo applicare la regola del

primo caso della divisione, e il quoziente rappresenterà *decimi, centesimi, millesimi* ec., secondo che avremo preso *uno, due, tre* ec. zeri. Prendendo per dividendo 47,00, si ottiene per quoziente esatto 235. Invece di aggiungere gli zeri alla destra del primo dividendo, si possono scrivere a misura che se ne ha bisogno nei dividendi parziali rispettivi.

Dunque, *per ridurre una frazione ordinaria in decimali, si divide il numeratore pel denominatore e si pone una virgola alla destra del quoziente, il quale deve essere sostituito da uno zero se il numeratore è minore del denominatore. Si scrive uno zero alla destra del resto ottenuto, e si divide il risultato pel denominatore; il quoziente è la prima cifra decimale. Si aggiunge uno zero alla destra del nuovo resto, e si divide il risultato pel denominatore; il quoziente è la seconda cifra decimale; e così via discorrendo.*

Esempio. Sia proposto di ridurre in decimali la frazione ordinaria $\frac{537}{200}$. L'operazione si dispone nel modo seguente:

```
5 3 7          | 2 0 0
1 3 7 0        |-------
  1 7 0 0      | 2,6 8 5
    1 0 0 0
    0 0 0 0
```

La frazione ordinaria $\frac{537}{200}$ è uguale al numero decimale 2,685.

103. Se usando la regola precedente non si trova mai un resto nullo, l'operazione continua indefinitamente, ed allora si dice che *la frazione ordinaria si*

riduce in una frazione decimale di un numero illimitato di cifre decimali.

Esempio. Si voglia ridurre in decimali la frazione $\frac{5}{7}$. Operando come sopra si trova

```
5 0              | 7
  1 0            |---------------
    3 0          | 0,7 1 4 2 8 . . . .
      2 0
        6 0
          4 0
          . .
          . .
          . .
          . .
```

La frazione decimale corrispondente a $\frac{5}{7}$ è 0,71428....

0,7 è il valore di $\frac{5}{7}$ con un errore minore di 1 decimo; 0,71 il valore con un errore minore di 1 centesimo, ec.

ESERCIZI.

I. Il miglio toscano equivale a braccia 2833,313; un braccio equivale a metri 0,58366: quanti metri contiene il miglio fiorentino?

II. Un grado della circonferenza della Terra quante miglia toscane contiene? (Vedi *Esercizio* IV, pag. 28).

III. Quanti metri contiene il miglio italiano? (Vedi *Esercizi* III e IV, pag. 28).

IV. Il *palmo* napolitano è la settemilesima parte del miglio italiano: a quanti metri equivale?

V. Si sa che

			metri
un *braccio*	milanese	equivale a . .	0,594936
un *piede*	modenese	id.	0,5230
un *piede*	padovano	id.	0,3574
un *piede*	parigino	id.	0,324839
un *piede*	del Reno	id.	0,313854
un *palmo*	romano	id.	0,223422
un *piede*	svedese	id.	0,297
un *piede*	piemontese	id.	0,5137
un *piede*	veneziano	id.	0,3474
un *piede*	veronese	id.	0,3429

Quante braccia di Milano, palmi di Roma, piedi di Modena, di Padova, di Parigi, del Reno, di Svezia, di Torino, di Venezia, di Verona contiene il miglio italiano?

VI. La Grecia antica usava per misure itinerarie lo *stadio olimpico* di 600 *piedi olimpici*, e lo *stadio pizio* o *delfico* di 600 *piedi delfici*. Il grado della circonferenza della Terra contiene 600 stadi olimpici e 750 stadi delfici. Si domanda il numero di metri contenuti nello stadio e nel piede olimpico, nello stadio e nel piede delfico.

VII. Quante braccia di Toscana e di Milano, palmi napolitani e romani, piedi di Padova, di Parigi, del Reno, di Svezia, di Piemonte, di Venezia, di Verona contiene il metro?

VIII. Un yards (misura di lunghezza) inglese equivale a metri 0,9143835; qual è la sua relazione alle misure di lunghezze contenute nell'esercizio precedente?

IX. Si sa che

il raggio di	Venere	è	0,985	di quello della Terra
id.	Mercurio	è	0,391	id.
id.	Marte	è	0,519	id.
id.	Giove	è	11,225	id.
id.	Saturno	è	9,022	id.

CAPITOLO VIII.

NUMERI COMPLESSI.

104. Si chiamano *numeri complessi* quei numeri che contengono diverse classi di unità di grado in grado più piccole derivate le une dalle altre secondo una suddivisione convenuta; l' unità principale si chiama *la prima specie*, e l' ultima o la minore dicesi *l' ultima* specie. Così i Toscani usano per unità di misura delle lunghezze il *braccio* che dividono in 20 parti eguali detti *soldi*, e il soldo in 12 parti chiamate *denari*; per unità di misura dei pesi adottano la *libbra*, che dividono in 12 *once*, l' oncia in 24 *denari*, il denaro in 24 *grani*; per unità monetaria la *lira* che dividono, come il braccio, in 20 *soldi* e il soldo in 12 *denari*. Se per misura di una lunghezza si trova, per esempio, 5 *braccia* 17 *soldi* 9 *denari*, è questo un numero complesso; il braccio è l' unità principale o la prima specie, il denaro è l' ultima specie. Il calcolo dei numeri complessi richiede speciali avvertenze che ci proponiamo di esporre in questo capitolo.

105. Il calcolo dei numeri complessi si può ridurre a quello dei numeri ordinari o a quello dei numeri decimali, convertendo i primi in frazioni ordinarie o decimali dell' unità principale. Comechè questo metodo non sia preferibile in generale, pur nondimeno è utile far conoscere come possa effettuarsi questa riduzione.

1°. *Ridurre in frazione ordinaria* $7^{tes.}\ 4^{pie.}\ 9^{pol.}\ 6^{lin.}$ [1]

tese	*piedi*	*pollici*	*linee*
7	4	9	6
$7\,\frac{115}{144}$	$4\,\frac{19}{24}$	$9\,\frac{1}{2}$	$\frac{6}{12}$ *di pollice*
$\frac{1123}{144}$ *di tesa*	$\frac{115}{24}$ *di piede*	$\frac{19}{2}$ *di pollice*	$\frac{1}{2}$
	$\frac{115}{144}$ *di tesa*	$\frac{19}{24}$ *di piede*	

Poichè 1 linea è $\frac{1}{12}$ di pollice, 6 linee sono $\frac{6}{12}$ o $\frac{1}{2}$ di pollice; quindi 9 pollici 6 linee equivalgono a pollici $9\,\frac{1}{2}=\frac{19}{2}$ di pollice. Ma 1 pollice è $\frac{1}{12}$ di piede, dunque $\frac{19}{2}$ di pollice sono $\frac{19}{2\times12}$ o $\frac{19}{24}$ di piede; per conseguenza 4 piedi 9 pollici 6 linee corrispondono a piedi $4\,\frac{19}{24}$ o a $\frac{115}{24}$ di piede; ma il piede è $\frac{1}{6}$ di tesa, dunque $\frac{115}{24}$ di piede sono $\frac{115}{24\times6}$ o $\frac{115}{144}$ di tesa. Quindi 7 tese 4 piedi 9 pollici 6 linee, equivalgono a tese $7\,\frac{115}{144}$ o a $\frac{1123}{144}$ di tesa.

Osservazione. La riduzione richiesta può effettuarsi ancora in un altro modo. 7 tese sono eguali a 42 piedi; quindi 7 tese 4 piedi equivalgono a 46 piedi, cioè a 46×12, o a 552 pollici; dunque 7 tese

[1] La *tesa* è l'antica misura francese di lunghezza; essa si divide in 6 *piedi*; il piede in 12 *pollici*; il pollice in 12 *linee*.

4 piedi 9 pollici pareggiano 561 pollici, cioè 561×12 o 6732 linee; e per conseguenza 7 tese 4 piedi 9 pollici 6 linee sono eguali a 6738 linee. Ma 1 linea è $\frac{1}{12}$ di pollice, $\frac{1}{144}$ di piede, $\frac{1}{864}$ di tesa; dunque il numero proposto equivale a $\frac{6738}{864}$ di tesa.

Il primo metodo è però in generale preferibile al secondo perchè dà un risultato più semplice.

2° *Ridurre in frazione decimale* 9^{lire} 12^{soldi} 8^{denari}.

80	12	
80	0,666...	
8	12,666...	20
.	66	0,6333...
.	66	9,6333...

Poichè 1 denaro è $\frac{1}{12}$ di soldo, 8 denari sono $\frac{8}{12}$ o 0,666.... di soldo; quindi 12 soldi 8 denari, corrispondono a soldi 12,666.... Per ridurre questo numero in frazione decimale di lira, bisognerà dividerlo per 20, e si avrà 0,6333....; quindi 9 lire 12 soldi 8 denari equivalgono a lire 9,6333....

ESEMPIO. Ridurre in frazione ordinaria e decimale 9 *moggia*, 5 *sacca*, 2 *staia*, 3 *quarti*, 6 *mezzette*.

Lo *staio* è l'unità di capacità per gli aridi in Toscana e si divide in 4 *quarti;* il quarto in 8 *mezzette;* la mezzetta in 2 *quartucci;* 3 staia formano un *sacco*, e 8 sacca formano il *moggio*.

1° Riduzione in frazione ordinaria.

moggia	*sacca*	*staia*	*quarti*	*mezzette*
9	5	2	3	6
$9\frac{287}{384}$	$5\frac{47}{48}$	$2\frac{15}{16}$	$3\frac{3}{4}$	$\frac{6}{8}$ *di quarto*
$\frac{3743}{384}$ *di mog.*	$\frac{287}{48}$ *di sac.*	$\frac{47}{16}$ *di st.*	$\frac{15}{4}$ *di qu.*	$\frac{3}{4}$
	$\frac{287}{384}$ *di mog.*	$\frac{47}{48}$ *di sac*	$\frac{15}{16}$ *di staio*	

2°. Riduzione in frazione decimale:

```
60  | 8
 40 |-----
  00| 0,75
    | 3,75      | 4
      15        |---------
        30      | 0,9375
          20    | 2,9375   | 3
            00     23      |-------
                     27    | 0,979
                       00  | 5,979    | 8
                              37      |-------------
                                59    | 0,747375
                                  30  | 9,747375
                                    60
                                    40
```

106. Le questioni reciproche alle precedenti si risolvono con eguale facilità.

1° *Ridurre la frazione ordinaria* $\frac{10211}{432}$ *di libbra* (*toscana*) *in libbre e parti di libbra.*

Dividendo il numeratore pel denominatore si ha 23 per quoziente e 275 per resto; dunque la frazione proposta è uguale a 23 libbre e $\frac{275}{432}$ di libbra. Ma una libbra è 12 once, dunque $\frac{275}{432}$ di libbra sono eguali a $\frac{275\times 12}{432}$ di oncia $=\frac{275}{36}$ di oncia, cioè a 7 once e $\frac{23}{36}$ di oncia.

Un' oncia è 24 denari, quindi $\frac{23}{36}$ di oncia sono eguali a $\frac{23 \times 24}{36}$ di denaro $= \frac{46}{3}$ di denaro, ovvero a 15 denari e $\frac{1}{3}$ di denaro. Un denaro è 24 grani, quindi $\frac{1}{3}$ di denaro è $\frac{24}{3}$ di grano ovvero 8 grani. Dunque la frazione ordinaria $\frac{10211}{432}$ di libbra equivale a 23 libbre, 7 once, 15 denari, 8 grani.

2° *Ridurre la frazione decimale* $8^{tese}{,}7892$ *in tese e parti di tesa.*

Si moltiplicherà 0,7892 per 6 e si otterrà 4,7352, che esprimerà 4 piedi con una frazione decimale di piede: si moltiplicherà 0,7352 per 12, e si avrà 8,8224, cioè 8 pollici ed una frazione decimale di pollice; finalmente si moltiplicherà 0,8224 per 12 e si avrà 9,8688 cioè 9 linee e una frazione di linea. Quindi la frazione decimale $8^{tese}{,}7892$ equivale a 8 tese, 4 piedi, 8 pollici e 10 linee.

I calcoli dei due ultimi esempi si dispongono nel seguente modo

Libbre.		*Tese.*
10211	432	8,7892
275	23 lib., 7 onc.,	6
12	15 den., 8 gr.	$4^{p}{,}7352$
3300		12
276		$8^{p}{,}8224$
24		12
6624		$9^{l}{,}8688$
144		
24		
3456		

Esempi:

1° Ridurre la frazione ordinaria $\frac{5629}{137}$ di ora in ore, minuti e secondi.

```
5629 | 137
 149 |------
  12 | 41 ore, 5 minuti, 15 secondi
  60
----
 720
  35
  60
----
2100
 730
  45
```

2° Ridurre la frazione decimale 0,329 di libbra (napolitana) in libbre e parti di libbra.

Prima della legge del 6 aprile 1840 la libbra napolitana si divideva in 12 *once*, l'oncia in 10 *dramme*, la dramma in 3 *scrupoli*, lo scrupolo in 20 *acini*.

```
libbra
0 , 3 2 9
      1 2
---------
3on, 9 4 8
      1 0
---------
9dr, 4 8 0
        3
---------
1sc, 4 4 0
      2 0
---------
8ac, 8 0 0
```

Passsiamo adesso a vedere quali avvertenze bisogna avere nell' addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione dei numeri complessi.

Addizione.

107. *Si scrivono i numeri proposti uno sotto l' altro, situando nella medesima colonna le unità della stessa classe; si comincia l' addizione dalle unità dell' ultima specie, e quando la loro somma sorpassa il numero di cui si compone l' unità della specie precedente, si riportano una o più di queste unità alla colonna cui appartengono; si fa l' addizione dei numeri contenuti nella nuova colonna, e dalla somma ottenuta si estraggono, se ve ne sono, le unità appartenenti alla terza colonna, e così di seguito.*

ESEMPJ.

tese	piedi	pollici	linee
8	4	9	7
2	3	5	2
5	5	6	9
17	1	9	6

libbre	oncie	denari	grani
4	7	18	21
15	11	15	17
3	9	19	22
24	5	6	12

La somma delle linee produce 18 linee, cioè 1 pollice più 6 linee; scriveremo 6 sotto la colonna delle linee, e riterremo un pollice per aggiungerlo alla colonna dei pollici. La somma dei pollici dà 20 pollici e 1 della colonna precedente, 21 pollici, cioè 1 piede e 9 pollici. Scriveremo 9 sotto la colonna dei pollici e riterremo 1 piede per aggiungerlo alla colonna dei piedi. La somma dei piedi dà 12 piedi e 1 della colonna precedente, 13 piedi, cioè 2 tese più 1 piede. Scriveremo 1 sotto la colonna dei piedi, e le 2 tese le aggiungeremo alla somma delle tese, cioè a 15, e avremo in tutto 17 tese. Dunque la somma totale è: 17 tese, 1 piede, 9 pollici, 6 linee.

La somma di libbre, once, denari e grani, si eseguisce in un modo affatto analogo.

Sottrazione.

108. *Si dispongono i numeri proposti come nell' addizione, e si comincia l' operazione dall' ultima specie; quando in qualche classe il numero da sottrarsi è maggiore di quello da cui deve togliersi, si aggiunge a quest' ultimo un' unità presa dalla classe precedente, dopo averla ridotta in unità della specie inferiore sulla quale si eseguisce la sottrazione.*

ESEMPJ.

lire	soldi	denari		sacca	staia	quarti	mezzette
12	14	8		4	2	1	6
7	19	11		3	2	3	7
4	14	9		—	2	1	7

Nella prima sottrazione si ragiona a questo modo: da 8 denari non possiamo togliere 11 denari, quindi agli 8 denari aggiungeremo 1 soldo, cioè 12 denari, togliendo questo soldo dai 14 contenuti nella colonna dei soldi, e diremo: 12 denari e 8 denari sono 20 denari, dai quali tolti 11 denari avremo 9 per resto, che scriveremo sotto la colonna dei denari. Dai 13 soldi rimanenti non si possono sottrarre 19 soldi; perciò prenderemo 1 lira, cioè 20 soldi, dalle 12 della colonna delle lire, e diremo 20 soldi più 13 sono 33 soldi, dai quali sottratti 19 soldi, avremo 14 per resto, che scriveremo sotto la colonna dei soldi. Finalmente, sottraendo 7 lire da 11 lire, avremo 4 lire, che scriveremo sotto la colonna delle lire.

La sottrazione di sacca, staia, quarti e mezzette si eseguisce coi medesimi principii.

Moltiplicazione.

109. La moltiplicazione può effettuarsi in più modi: 1° *riducendo in frazioni ordinarie o decimali della prima specie il moltiplicando e il moltiplicatore, eseguendo la moltiplicazione secondo le regole conosciute, e convertendo il prodotto ottenuto in unità del moltiplicando e parti di unità*. Supponiamo, per esempio, che si voglia calcolare il costo di 6 braccia, 9 soldi, 4 denari di un panno che si è comprato a 16 lire 18 soldi 8 denari il braccio. La frazione di braccio, 9 soldi 4 denari, equivale a $\frac{7}{15}$ di braccio, e la frazione di lira 18 soldi 8 denari equivale a $\frac{14}{15}$; quindi si moltiplicherà $6\frac{7}{15}$ per $16\frac{14}{15}$ e si otterrà il prodotto $109\frac{113}{225}$ che deve esprimer lire; e riducendo in parti di lira la frazione ordinaria $\frac{113}{225}$, il costo domandato sarà 109 lire, 10 soldi, $\frac{8}{15}$ di denaro.

Saremmo giunti allo stesso risultamento, se i due fattori si fossero ridotti in frazioni decimali.

2° Il secondo metodo, che chiamasi di *prendere in parti*, è in generale preferibile al precedente, ed è particolarmente molto adoperato nell'astronomia pratica. I seguenti esempi serviranno a dichiararlo completamente.

I. *Un braccio di stoffa costa Lire* 20. 14. 8; *quanto costeranno* 8 *braccia della stessa stoffa?*

È chiaro che le 8 braccia costeranno 8 volte Lire 20. 14. 8; quindi per rispondere al quesito proposto

bisogna moltiplicare Lire 20. 14. 8 per 8; il risultato esprimerà lire

	20^l	14^s	8^d
	8^b		
	160^l		
per 10 *soldi*. . . .	4		
per 2 *soldi*. . . .	0	16^s	
per 2 *soldi*. . . .	0	16	
per 8 *denari*. . . .		5	4^d
Totale. . . .	165^l	17^s	4^d

Per effettuare questa moltiplicazione evidentemente basta moltiplicare per 8 successivamente 20 lire, 14 soldi, 8 denari e aggiungere i risultati. La moltiplicazione per 20 lire si esegue senza alcuna difficoltà e dà per prodotto 160 lire.

Per moltiplicare 8 *braccia* per 14 *soldi,* si considera il moltiplicando 14 decomposto in 10 più 2 più 2, e si dice: poichè il prodotto di 8 *braccia* per 1 *lira* dà 8 *lire,* il prodotto di 8 *braccia* per 10 *soldi,* che sono metà di una lira, dovrà dare la metà di 8 *lire,* cioè 4 *lire;* ed il prodotto di 8 *braccia* per 2 *soldi,* che sono la quinta parte di dieci soldi, dovrà dare la quinta parte di 4 soldi, cioè 0^l 16^s; il qual resultato si scrive due volte. Per formare il propotto per 8 *denari* si dice: se il prodotto di 8 *braccia* per 2 *soldi* è 16 *soldi,* il prodotto di 8 *braccia* per 8 *denari,* che sono la terza parte di 2 *soldi,* deve dare la terza parte di 16 *soldi,* cioè 5^s 4^d. Avverto che il prodotto per 4 soldi poteva effettuarsi ad un tratto, osservando che 4 soldi sono la quinta parte di una lira, e che quindi il prodotto di 8 braccia per 4 soldi dovrà dare la quinta parte di 8 lire, cioè 1^l 12.

II. *Un braccio di stoffa costa Lire* 20. 14. 8;

quanto costeranno 8 *braccia*, 6 *soldi e* 3 *denari della stessa stoffa?*

Anche qui è chiaro che si otterrà il costo richiesto moltiplicando Lire 20. 14. 8 per braccia 8. 6. 3. L'operazione si eseguirà nel seguente modo.

	20^l	14^s	8^d
	8^b	6^s	3^d
	160^l		
per 10 *soldi*. . . .	4		
per 4 *soldi*.	1	12^s	
per 8 *denari*. . . .		5	4^d
per 4 *soldi*.	4	2	$11\frac{1}{5}$
per 2 *soldi*.	2	1	$5\frac{3}{5}$
per 3 *denari*. . . .		5	$2\frac{1}{5}$
Prodotto totale	172^l	6^s	11^d

La moltiplicazione per 8 *braccia* si fa come sopra; poi il moltiplicatore 6 *soldi* si decompone in 4 *soldi* e 2 *soldi*, e si dice: poichè il prodotto di 1 *braccio* per 20^l 14^s 8^d dà 20^l 14^s 8^d, il prodotto di 4 *soldi*, che sono il quinto di un *braccio*, per lo stesso numero, darà la quinta parte di 20^l 14^s 8^d, cioè 4^l 2^s $11^d\frac{1}{5}$; ed il prodotto per 2 *soldi*, metà di 4 soldi, per 20^l 14^s 8^d, darà la metà di 4^l 2^s $11^d\frac{1}{5}$, cioè 2^l 1^s $5^d\frac{3}{5}$. Osservando adesso che 2 *soldi* equivalgono a 24 *denari*, si vede che 3^d sono l'ottavo di 2 *soldi*, e quindi il prodotto di 3 *denari* per 20^l 14^s 8^d è l'ottavo di 2^l 1^s $5^d\frac{3}{5}$, cioè 5^s $2^d\frac{1}{5}$.

III *Due mercanti vogliono fare tra loro un cambio di zucchero con caffè; stabiliscono che una libbra di caffè debba equivalere a* $2^{lib.}$ $7^{on.}$ $18^{de.}$ $13^{gr.}$ *di zucchero; quanto zucchero dovrà darsi in cambio di* $21^{lib.}$ $9^{on.}$ $15^{de.}$ $17^{gr.}$ *di caffè?*

È chiaro che la quantità di zucchero da darsi in

cambio si conoscerà moltiplicando $2^{lib.}\ 7^{on.}\ 18^{de.}\ 13^{gr.}$ per $21^{lib.}\ 9^{on.}\ 15^{de.}\ 17^{gr.}$

	$2^{lib.}$	$7^{on.}$	$18^{d.}$	$13^{gr.}$	
	21	9	15	17	
	$42^{lib.}$				
per 6 *once*.	10	$6^{on.}$			
per 1 *oncia*. . . .	1	9			
per 12 *denari*. . . .		10	12		
per 6 *denari*. . . .		5	6		
per 1 *denaro*.					21^{d}
per 12 *grani*. . . .			10^{d}	12	
per 1 *grano*. . . .				$21^{gr.}$	
per 6 *once*.	1	3	21	6,50	
per 3 *once*.		7	22	15,25	
per 1 *oncia*.					$2^{on.}\ 15^{d.}\ 13^{gr.}$,08
per 12 *denari*. . . .		1	7	18,54	
per 3 *denari*. . . .			7	22,635	
per 1 *denaro*.					$2^{d.}\ 15^{gr.}$,545
per 12 *grani*. . . .			1	7,772	
per 4 *grani*. . . .				10,590	
per 1 *grano*. . . .				2.647	
Totale. . . .	$57^{lib.}$	$8^{on.}$	$18^{d.}$	$20^{gr.}$,934	

Questo esempio non offre alcuna difficoltà; per eseguire talune moltiplicazioni abbiamo dovuto fare dei prodotti ausiliari che si sono segnati a parte.

Divisione.

110. Bisogna considerare due casi:

1° *Quando il dividendo e il divisore sono dello stesso genere;*

2° *Quando il dividendo e il divisore sono di diverso genere.*

Il primo caso ha luogo, per esempio, nel seguente quesito: Sapendosi che una libbra di una certa mercan-

zia costa 34^{lire} 12^{soldi} 3^{denari}, si domanda quante libbre di una tal mercanzia potranno comprarsi con 1528^{lire} 14^{soldi} 6^{denari}. Infatti è chiaro che per risolvere questa questione bisogna vedere quante volte 34^{l} 12^{s} 3^{d} sono contenute in 1528^{l} 14^{s} 6^{d}, e si vede che il quoziente dev' essere di genere diverso dal dividendo e dal divisore. Per eseguire questa divisione bisognerà ridurre i due numeri dati in frazioni ordinarie della prima specie, ed esprimere il quoziente in forma di numero astratto o di numero concreto, come esige il quesito che ha dato motivo al calcolo.

1528^{l}	14^{s}	6^{d}	34^{l}	12^{s}	3^{d}
1528$\frac{29}{40}$	14$\frac{1}{2}$		34$\frac{49}{80}$	12$\frac{1}{4}$	
61120	29		2720	49	
29	2		49	4	
61149			2769		
40			80		

$$\frac{61149}{40} : \frac{2769}{80} = \frac{122298}{80} : \frac{2769}{80} = \frac{122298}{2769}$$

```
122298libbre  | 2769
 11538        |--------------------
   462        | 44l 2o 0d 1g 229/923
    12
  ----
   924
  462
  ----
  5544once
     6
    24
  ----
   144denari
    24
  ----
   576
  288
  ----
  3456grani
   687
```

111. *La divisione, nel caso che si considera, si eseguisce spesso più facilmente riducendo i numeri dati in unità dell'ultima specie, e dividendoli uno per l'altro con esprimere il quoziente sotto la forma voluta dalla quistione che ha dato motivo al calcolo.* Ecco un esempio di questo metodo.

Si domanda quante lire ci vogliono per comprare 98 braccia 18 soldi 8 denari di panno, sapendo che con una lira si comprano 2 braccia 8 soldi 4 denari di questo panno.

L'operazione si dispone nel seguente modo:

	$98^b\ 18^s\ 8^d$	$2^b\ 8^s\ 4^d$
	20	20
	1960	40
	18	8
	1978	48
	12	12
	3956	96
	1978	48
	23736	576
	8	4
dividendo..	23744	580 *divisore*
	544	$40^l\ 18^s\ 9^d\frac{3}{29}$
	20	
	10880^{soldi}	
	5080	
	440	
	12	
	5280^{denari}	
	60	

112. *Secondo caso.* In questo caso il divisore è, o può considerarsi come un numero astratto, per cui il quoziente deve essere dello stesso genere del dividendo, e *la divisione può sempre ridursi a quella di un numero complesso per un numero incomplesso.*

Esempio I. Una somma di 448^{lire} 10^{soldi} 3^{denari} deve distribuirsi a 24 persone; si domanda quanto spetterà a ciascuno? Qui trattandosi di decomporre il numero proposto in 24 parti eguali, il divisore è realmente un numero astratto, *e la divisione si eseguirà come sui numeri interi, ma a più riprese, formando di ogni resto un nuovo dividendo, con ridurlo in unità della specie seguente ed aggiungervi le unità della stessa specie contenuta nel numero proposto, e così continuando sino all' ultima specie.*

	448^{l}	10^{s}	3^{d}	24
	208			18^{l} 13^{s} $9^{d}\frac{1}{8}$
1° *resto*	16			
	20			
	320^{s}			
	10			
2° *dividendo* . .	330			
	90			
2° *resto*	18			
	12			
	216^{d}			
	3			
3° *dividendo* . .	219			
ultimo resto . .	3			

Si sono divise 448 *lire* per 24, e si è ottenuto il quoziente 18 *lire* ed il resto 16 *lire*; questo resto si è

moltiplicato per 20 e si sono ottenuti 320 *soldi*, aggiunti ai quali i 10 *soldi* del numero proposto, si è avuto il 2° dividendo 330 *soldi*, che ha dato per quoziente 13 *soldi* e per resto 18 *soldi*; questo secondo resto si è ridotto in denari moltiplicandolo per 12, al prodotto 216 *denari* si sono aggiunti i 3 *denari* del numero proposto, e si è ottenuto il 3° dividendo 219 *denari*, che diviso per 24 ha dato per quoziente $9\frac{3}{24}$

Esempio II. Con 1350 *lire*, 14 *soldi*, 10 *denari* si sono comprate 58 *braccia*, 6 *soldi*, 8 *denari* di panno: si domanda quanto si è pagato per ogni braccio. Cambiando il divisore $58^b\ 6^s\ 8^d$ in frazione ordinaria, si avrà $\frac{175}{3}$, e l'operazione sarà ridotta a dividere la proposta somma di lire, soldi e denari, per la frazione $\frac{175}{3}$, cioè a moltiplicarla per 3 e dividerla per 175. La moltiplicazione si eseguirà con le regole già date, e la divisione col metodo usato nell'esempio precedente.

ESERCIZI.

I. Un metro equivale a $3^{piedi}\ 0^{pollici}\ 11^{lin.}$,296; la tesa a quanti metri è uguale?

II. A quanti metri equivalgono braccia toscane 47. 18. 4? (Vedi *Esercizio I*, pag. 76).

III. Una libbra toscana equivale a chilog. 0,339542; si vuol sapere: 1° a quanti chilogrammi equivalgono libbre 23. 11. 19. 13? 2° a quante libbre equivalgono chilogrammi 59,361? 3° che relazione hanno col *grammo* (millesima parte del chilogrammo), l'oncia, il denaro, il grano della libbra toscana?

IV. Metri 27,3459 a quante braccia e parti di braccio equivalgono? a quante tese e parti di tesa? Che relazioni vi sono tra la tesa, il piede, il pollice, la linea e il braccio, il soldo e il denaro?

V. Una macchina applicata ad una manifattura dà un prodotto di 723 braccia 18 soldi, 8 denari in 9 ore; qual prodotto darà in 7 ore 29 minuti e 53 secondi?

CAPITOLO IX.

RAPPORTI E PROPORZIONI.

113. Si chiama *rapporto* o *ragione geometrica* di due grandezze della stessa specie il numero che esprime quante volte la prima contiene la seconda e quante parti della seconda.

È chiaro che il rapporto di due grandezze è uguale al rapporto dei numeri che le misurano, qualunque sia l' unità.

Il rapporto di due numeri è uguale al quoziente di questi due numeri. Giacchè il quoziente di due numeri esprime quante volte il dividendo contiene il divisore e quante parti del divisore.

Il rapporto di due numeri, di 18 a 6 per esempio, può indicarsi con $18 : 6$ o con $\frac{18}{6}$.

114. Due rapporti sono detti *inversi* l' uno dell' altro quando sono composti degli stessi termini ma disposti in ordine inverso. Così $18 : 6$ e $6 : 18$ sono due rapporti inversi. È chiaro che il prodotto di due rapporti inversi è uguale all' unità.

115. Si dice *proporzione* l' uguaglianza tra due rapporti. Così i due rapporti eguali $\frac{15}{6}$ e $\frac{20}{8}$ formano una proporzione che si scrive

$$\frac{15}{6}=\frac{20}{8}, \text{ o } 15 : 6 :: 20 : 8.$$

Sotto quest' ultima forma si legge, 15 *sta a* 6 *come* 20 *sta a* 8.

15, 6, 20, 8 si chiamano i termini della proporzione, $\frac{15}{6}$ è il primo rapporto, $\frac{20}{8}$ il secondo; 6 e 20 sono i *medii*, 15 e 8 gli *estremi*; 15 è *l' antecedente* del primo rapporto e 6 n' è il *conseguente*; 20 e 8 sono rispettivamente l'antecedente e il conseguente del secondo rapporto.

116. Una proporzione che ha i medii eguali si dice *proporzione continua*, e i medii si chiamano *medii proporzionali.*

Esempio. 18 : 6 : : 6 : 2 è una proporzione continua; 6 è medio proporzionale fra 18 e 2. La proporzione continua si scrive più semplicemente.

$$\div 18 : 6 : 2.$$

117. *In qualunque proporzione il prodotto degli estremi è eguale a quello dei medii.*

Abbiasi la proporzione

$$15 : 6 : : 20 : 8,$$

o ciò ch' è lo stesso

$$\frac{15}{6} = \frac{20}{8}.$$

Moltiplichiamo i due termini della prima frazione per 8 e quelli della seconda per 6, otterremo

$$\frac{15 \times 8}{6 \times 8} = \frac{20 \times 6}{8 \times 6}.$$

Queste due frazioni eguali avendo lo stesso denomi-

natore hanno i loro numeratori eguali, e per conseguenza

$$15 \times 8 = 20 \times 6,$$

ciò che bisognava dimostrare.

118. *Se quattro numeri sono tali che il prodotto degli estremi è uguale a quello dei medii, questi quattro numeri formano una proporzione.*

Siano 15, 6, 20, 8 quattro numeri tali che si abbia

$$15 \times 8 = 6 \times 20$$

Dividiamo questi due prodotti eguali per 8×6, avremo:

$$\frac{15 \times 8}{8 \times 6} = \frac{6 \times 20}{8 \times 6}.$$

Sopprimiamo il fattore 8 comune ai due termini della prima frazione, e il fattore 6 comune ai due termini della seconda, avremo

$$\frac{15}{6} = \frac{20}{8}.$$

119. Dati tre termini di una proporzione è facile trovarne il quarto. Supponiamo che il termine ignoto sia un estremo.

Siano 15, 6 e 20 i primi termini di una proporzione; rappresentiamo il quarto termine ignoto con x, avremo

$$15 : 6 :: 20 : x;$$

e poichè il prodotto degli estremi è uguale a quello dei medii,

$$15 \times x = 6 \times 20.$$

Dividendo questi due prodotti eguali per 15,

$$x = \frac{6 \times 20}{15} = 8$$

Dunque, *il quarto termine di una proporzione è uguale al prodotto dei medii diviso per l'estremo cognito.*

Un ragionamento analogo proverebbe che *se il termine ignoto è un medio, si otterrà il suo valore dividendo il prodotto degli estremi pel medio cognito.*

120. Quando in una proporzione si mutano i medii l'uno nell'altro, si dice *permutare* la proporzione; quando si pongono gli antecedenti in luogo dei conseguenti e viceversa, si dice *invertire* la proporzione.

In virtù di quello che abbiamo detto innanzi, ad una proporzione si possono far subire tutte le trasformazioni che non alterano l'eguaglianza tra il prodotto degli estremi e quello dei medii. Così è facile provare che una proporzione può scriversi in otto modi differenti. Infatti abbiasi la proporzione

(1) $15 : 6 :: 20 : 8;$

Permutando si ottiene

(2) $15 : 20 :: 6 : 8;$

Invertendo la proporzione (2)

(3) $20 : 15 :: 8 : 6;$

Permutando quest'ultima

(4) $20 : 8 :: 15 : 6;$

Invertendo

(5) $8 : 20 :: 6 : 15;$

Permutando

(6) $8:6::20:15;$

Invertendo

(7) $6:8::15:20;$

Permutando

(8) $6:15::8:20.$

121. ***Se due proporzioni hanno un rapporto comune, gli altri due rapporti formano una proporzione.***

Abbiansi infatti le due proporzioni

$$15:6::20:8$$

$$10:4::20:8,$$

o ciò ch'è lo stesso

$$\frac{15}{6}=\frac{20}{8},\ \frac{10}{4}=\frac{20}{8}.$$

Poichè i due rapporti $\frac{15}{6}$ e $\frac{10}{4}$ sono entrambi eguali a $\frac{20}{8}$, è evidente che debbono essere eguali fra loro, cioè che deve aversi

$$15:6::10:4.$$

122. ***Se due proporzioni hanno i medesimi antecedenti, i conseguenti sono in proporzione.***

Siano date le proporzioni

$$15:6::20:8$$

$$15:12::20:16$$

che hanno gli stessi antecedenti. Permutando si ottiene

$$15 : 20 :: 6 : 8$$

$$15 : 20 :: 12 : 16,$$

e quindi (121)

$$6 : 8 :: 12 : 16.$$

Al modo stesso si dimostra che *se due proporzioni hanno gli stessi conseguenti, gli antecedenti sono in proporzione.*

123. *Se due proporzioni hanno gli stessi estremi, il rapporto dei conseguenti delle loro prime ragioni è inverso a quello degli antecedenti delle seconde. Se due proporzioni hanno gli stessi medii, il rapporto degli antecedenti delle loro prime ragioni è inverso a quello dei conseguenti delle seconde.*

Siano date le proporzioni

$$15 : 6 :: 20 : 8$$

$$15 : 3 :: 40 : 8$$

che hanno gli stessi estremi. Dalla prima proporzione si ha $15 \times 8 = 6 \times 20$; e dalla seconda $15 \times 8 = 3 \times 40$; quindi i due prodotti 6×20 e 3×40 essendo eguali al prodotto unico 15×8 sono eguali fra loro e si ha

$$6 \times 20 = 3 \times 40, \text{ cioè } \frac{6}{3} = \frac{40}{20}.$$

124. *In qualunque proporzione la somma o la differenza dei due primi termini sta al secondo come la somma o la differenza dei due ultimi sta al quarto.*

Si abbia la proporzione

$$15 : 6 :: 20 : 8,$$

o ciò ch'è lo stesso

$$\frac{15}{6}=\frac{20}{8}.$$

Da questa eguaglianza se ne deducono le altre due

$$\frac{15}{6}+1=\frac{20}{8}+1$$

$$\frac{15}{6}-1=\frac{20}{8}-1,$$

ovvero

$$\frac{15}{6}+\frac{6}{6}=\frac{20}{8}+\frac{8}{8}$$

$$\frac{15}{6}-\frac{6}{6}=\frac{20}{8}-\frac{8}{8};$$

ed effettuando le somme e le sottrazioni indicate

$$\frac{15+6}{6}=\frac{20+8}{8},$$

$$\frac{15-6}{6}=\frac{20-8}{8},$$

lo che equivale alle due proporzioni

$$15+6:6::20+8:8$$

$$15-6:6::20-8:8$$

Queste due proporzioni, in virtù della proporzione

$$15:6::20:8,$$

si possono scrivere

$$15+6:15::20+8:20$$

$$15-6:15::20-8:20,$$

cioè che *la somma o la differenza dei due primi termini sta al primo come la somma o la differenza dei due ultimi sta al terzo.*

125. La proporzione $20 : 8 :: 15 : 6$, può scriversi

$$20 : 15 :: 8 : 6;$$

e quindi

$$20+15 : 20 :: 8+6 : 8$$
$$20-15 : 20 :: 8-6 : 8,$$

o ciò ch'è lo stesso

$$20+15 : 8+6 :: 20 : 8 :: 15 : 6,$$
$$20-15 : 8-6 :: 20 : 8 :: 15 : 6,$$

cioè che *in una proporzione qualunque la somma o la differenza degli antecedenti sta alla somma o alla differenza dei conseguenti come un antecedente sta al suo conseguente.*

126. *Moltiplicando termine a termine due proporzioni si forma una nuova proporzione.*

Siano date le proporzioni

$$20 : 8 :: 15 : 6$$
$$12 : 4 :: 9 : 3,$$

Moltiplicando termine a termine, si ottiene la nuova proporzione

$$20 \times 12 : 8 \times 4 :: 15 \times 9 : 6 \times 3.$$

Infatti, il rapporto $\frac{20 \times 12}{8 \times 4}$ eguaglia il prodotto dei rapporti $\frac{20}{8}$, $\frac{12}{4}$; il rapporto $\frac{15 \times 9}{6 \times 3}$ eguaglia il prodotto dei rapporti $\frac{15}{6}$, $\frac{9}{3}$, che sono rispettivamente

eguali ai due primi; dunque i due rapporti $\frac{20 \times 12}{8 \times 4}$ e $\frac{15 \times 9}{6 \times 3}$ sono eguali tra loro.

ESERCIZI.

I. Se si hanno più rapporti uguali, la somma degli antecedenti sta alla somma dei conseguenti, come un antecedente sta al suo conseguente.

II. In qualunque proporzione, la somma degli antecedenti sta alla loro differenza come la somma dei conseguenti sta alla loro differenza.

III. Innalzando a potenza i termini di una proporzione si forma una nuova proporzione.

IV. Quattro creditori debbono dividersi 21000 lire, il credito del primo sta a quello del secondo come 2 a 3, il credito del secondo sta a quello del terzo come 4 a 5, il credito del terzo sta a quello del quarto come 6 sta a 7: quanto avrà ciascuno dei creditori?

V. 30 paoli toscani equivalgono a 20 lire toscane; 70 lire toscane equivalgono a 14 ducati napolitani; 4 ducati pareggiano 17 franchi; 4 franchi equivalgono ad un rublo russo: il paolo che parte è del rublo?

VI. I termini di una proporzione si possono moltiplicare o dividere per uno stesso numero.

CAPITOLO X.

REGOLE DEL TRE.

127. Si dice che due grandezze sono proporzionali l'una all'altra, quando due valori qualunque della prima hanno lo stesso rapporto dei valori corrispondenti della seconda.

Esempio. La quantità di viveri necessaria per un bastimento è proporzionale al tempo che deve durare il viaggio che si vuole intraprendere. Infatti è chiaro che se per 2 giorni di viaggio si richiede una data quantità di viveri, per 4, 6, 8 ec. giorni, vi bisognerà una quantità doppia, tripla, quadrupla ec. di viveri.

128. Il valore di una grandezza dipende ordinariamente da molti elementi; così per esempio, la quantità di materiali necessaria per la costruzione di un muro dipende dalla lunghezza, larghezza e altezza del muro. Allora si dirà che due grandezze sono proporzionali quando cambiando una di esse, e tutte le altre circostanze rimanendo le stesse, due valori qualunque della prima sono proporzionali ai valori corrispondenti della seconda. Così la quantità di materiali necessaria per la costruzione di un muro è proporzionale alla sua lunghezza; infatti se noi raddoppiamo, triplichiamo ec. la lunghezza, lasciando immutate la larghezza e l'altezza, avremo evidentemente bisogno di una quantità doppia, tripla ec., di materiali.

Nell'esempio addotto, si dirà anche che la quantità di materiali è proporzionale a tre grandezze, cioè alla lunghezza, alla larghezza e all'altezza del muro.

Dunque una grandezza può essere proporzionale a molte altre.

Si dice che due grandezze sono inversamente proporzionali l'una all'altra, quando due valori qualunque dell'una hanno un rapporto inverso a quello dei valori corrispondenti dell'altra.

129. Esempio. Il tempo necessario per la costruzione di un muro è inversamente proporzionale al numero degli operai che si adopera. Infatti è chiaro che se questo numero diviene doppio, triplo ec., il tempo necessario per la costruzione dal muro sarà ridotto alla metà, alla terza parte ec.; se il numero degli operai diviene i $\frac{5}{7}$ di ciò che era, il tempo diverrà i $\frac{7}{5}$.

È chiaro ancora che una grandezza può essere ad una volta proporzionale a certe grandezze e inversamente proporzionale ad altre. Così nell'esempio precedente il tempo richiesto per la costruzione di un muro è proporzionale alla lunghezza, larghezza e profondità del muro, ed inversamente proporzionale al numero degli operai che vi si addicono: Cioè che:

La larghezza e altezza del muro restando le stesse, come pure il numero degli operai, il tempo è proporzionale alla lunghezza.

La lunghezza e l'altezza del muro restando le stesse, come pure il numero degli operai, il tempo è proporzionale alla larghezza.

La lunghezza e la larghezza restando le stesse, come pure il numero degli operai, il tempo è proporzionale all'altezza.

La lunghezza, larghezza e altezza del muro restando le stesse, il tempo è inversamente proporzionale al numero degli operai.

130. Regola del tre semplice. Una regola del tre semplice è un quesito nel quale, conosciuto il valore di una grandezza, come pure quello di un' altra grandezza alla quale la prima è direttamente o inversamente proporzionale, si calcola ciò che diventa la prima per un nuovo valore attribuito alla seconda.

Se le due grandezze sono direttamente proporzionali, la regola è diretta: nel caso contrario, è inversa.

Esempio I. 35 *braccia di panno costano* 170 *lire,* 72 *braccia dello stesso panno quante lire costeranno?*

Il costo del panno è direttamente proporzionale alla sua lunghezza; quindi la soluzione di questo esempio dipende da una regola del tre diretta. Indichiamo con x il costo di 72 braccia di panno; avremo la proporzione

$$35 : 72 :: 170 : x,$$

da cui

$$x = \frac{72 \times 170}{35} = 349^{l}\ 14^{s}\ 3^{d}\ \frac{3}{7}.$$

Esempio II. 25 *operai hanno lavorato* 15 *giorni per fare un certo lavoro:* 17 *operai quanto tempo metteranno a fare lo stesso lavoro?*

Il tempo necessario è inversamente proporzionale al numero di operai; quindi la soluzione di questo esempio dipende da una regola del tre inversa. Indichiamo con x il numero di giorni cercato; il rapporto degli operai è $\frac{25}{17}$, quello dei giorni è $\frac{15}{x}$; questi due rapporti debbono essere inversi fra loro, dunque deve aversi (114)

$$\frac{25}{17} \times \frac{15}{x} = 1.$$

Poichè $\frac{25}{17}$ moltiplicato per $\frac{15}{x}$ è uguale a 1, ne se-

gue che $\frac{25}{17}$ è il quoziente di 1 diviso per $\frac{15}{x}$; ma l'unità divisa per una frazione è uguale a questa frazione rovesciata, dunque

$$\frac{25}{17} = \frac{x}{15}$$

ovvero

$$25 : 17 :: x : 15,$$

da cui

$$x = \frac{25 \times 15}{17} = 22^{\text{g}}\ 1^{\text{ora}}\ \frac{7}{17}.$$

ESEMPIO III. *Per coprire un certo mobile con una stoffa larga* 3 *braccia ce ne sono volute* 28 *braccia; per coprirlo nuovamente con altra stoffa larga braccia* 2,5 *quanta ce ne vorrà?*

La quantità di stoffa necessaria per coprire un dato mobile è inversamente proporzionale alla larghezza della stoffa; quindi abbiamo una regola del tre inversa. Indichiamo con x la cercata quantità di stoffa; il rapporto delle larghezze è $\frac{3}{2,5}$, quello della quantità di stoffa è $\frac{28}{x}$; questi due rapporti debbono essere inversi fra loro, dunque deve aversi

$$\frac{3}{2,5} \times \frac{28}{x} = 1.$$

Poichè $\frac{3}{2,5}$ moltiplicato per $\frac{28}{x}$ è uguale a 1, ne segue che $\frac{3}{2,5}$ è uguale al quoziente della divisione di 1 per $\frac{28}{x}$ cioè a $\frac{x}{28}$; laonde

$$\frac{3}{2,5} = \frac{x}{28};$$

ovvero

$$3 : 2,5 :: x : 28$$

da cui

$$x = \frac{3 \times 28}{2,5} = 33^{br}\ 12^{sol}$$

131. Regola del tre composta. Una regola del tre composta è un quesito nel quale il valore di una quantità essendo conosciuto, come pure quello di molte altre da cui essa dipende, e a ciascuna delle quali essa è direttamente o inversamente proporzionale, si calcola ciò che diventa questa quantità quando tutte le altre acquistano nuovi valori.

Esempio I. 17 *operai lavorando per* 5 *giorni hanno fatto* 69 *braccia di lavoro;* 23 *operai in* 11 *giorni quanto lavoro faranno?*

Indichiamo con x la quantità di lavoro cercata e disponiamo tutti i dati del quesito su due linee orizzontali, in modo tale che i due valori di ciascuna specie siano l'uno al di sopra dell'altro:

Operai	Giorni	Braccia
17	5	69
23	11	x

Per risolvere questa quistione decomponiamola in altre più semplici:

1° Se 17 operai lavorando 5 giorni fanno 69 braccia di lavoro, 23 operai nello stesso tempo quante braccia faranno? Indichiamo con x' questo numero; è chiaro che il quesito è una regola del tre diretta; quindi si avrà la proporzione

$$17 : 23 :: 69 : x',$$

da cui

$$x' = \frac{23 \times 69}{17}.$$

2° Se 23 operai lavorando 5 giorni fanno $\frac{23 \times 69}{17}$ braccia di lavoro, lo stesso numero di operai lavorando 11 giorni quante braccia faranno? Anche questo quesito è un regola del tre diretta, e quindi si ha la proporzione

$$5 : 11 :: \frac{23 \times 69}{17} : x$$

da cui

$$x = \frac{23 \times 69 \times 11}{17 \times 5}.$$

I due quesiti precedenti s'indicano ordinariamente nel modo seguente:

Operai	Giorni	Braccia
17	5	69
23	5	x'
23	11	x

La prima linea contiene solo quantità date; la seconda contiene 23 operai, 5 giorni ed una incognita x' che rappresenta quante braccia di lavoro faranno 23 operai lavorando 5 giorni; la terza contiene 23 operai, 11 giorni e l'incognita x del problema. Ho quindi le due proporzioni:

$$17 : 23 :: 69 : x'$$
$$5 : 11 :: x' : x,$$

Moltiplicando termine a termine queste proporzioni ottengo,

$$17 \times 5 : 23 \times 11 :: 69 \times x' : x' \times x;$$

ovvero

$$\frac{17 \times 5}{23 \times 11} = \frac{69 \times x'}{x' \times x};$$

sopprimendo nel secondo rapporto il fattore x' comune ai suoi due termini, ho

$$\frac{17 \times 5}{23 \times 11} = \frac{69}{x},$$

da cui

$$x = \frac{69 \times 23 \times 11}{17 \times 5}.$$

Esempio II. *Con libbre 36 di filo si è fabbricata una pezza di tela lunga 150 braccia e larga 2 braccia; che lunghezza d' una tela simile alla prima ma larga* $1^b,5$ *si potrà fabbricare con 58 libbre di filo?*

Dispongo le quantità della quistione nel seguente modo:

Libbre	Lunghezza	Larghezza
36	150	2
58	x	1,5

Risolviamo questo problema in due altri più semplici.

1° Se con 36 libbre di filo si sono fabbricate 150 braccia di tela, quante braccia se ne fabbricheranno con 58 libbre? Indichiamo con x' questa lunghezza ignota, e osserviamo che aumentando il numero delle libbre di filo aumenta la lunghezza della tela; quindi avremo la proporzione

$$36 : 58 :: 150 : x'.$$

2° Se con 58 libbre di filo si fabbricano x' braccia di tela avente 2 braccia di larghezza, quante braccia se

ne fabbricheranno con queste 58 libbre, se la larghezza è $1^b,5$? Meno larga è la tela e più braccia potranno fabbricarsene; quindi il quesito dipende da una regola del tre inversa, e si ha

$$1,5 : 2 :: x' : x.$$

Moltiplichiamo queste due proporzioni termine a termine, otterremo la nuova proporzione

$$36 \times 1,5 : 58 \times 2 :: 150 \times x' : x' \times x,$$

da cui

$$x = \frac{58 \times 2 \times 150}{36 \times 1,5} = 322^b \frac{2}{9}$$

sopprimendo il fattore x' comune al numeratore e al denominatore.

Esempio III. 45 *operai lavorando* 14 *ore per giorno, durante* 23 *giorni, hanno fabbricato un muro alto* 7 *braccia, lungo* 163 *braccia, largo* $0^{br},35$. *In quanti giorni* 57 *operai che lavorano* 11 *ore per giorno, fabbricheranno un muro alto* 9 *braccia, lungo* 170 *braccia, largo* $0^{br},50$?

Operai	Ore	Giorni.	Altezza.	Lunghezza.	Larghezza.
45	14	23	7	163	0,35
57	11	x	9	170	0,50

Questo problema si risolve nei seguenti:

1°. Se 45 operai lavorando 23 giorni hanno fabbricato un dato muro, 57 operai in quanti giorni lo fabbricheranno? Maggiore è il numero degli operai, e meno giorni si richiederanno per fabbricare un dato muro; quindi questo problema dipende da una regola del tre inversa, indicando con x_1 l'incognita; avremo

$$(1) \qquad 45 : 57 :: x_1 : 23.$$

2°. Se 57 operai lavorando 14 ore al giorno hanno impiegato x_1 giorni per fabbricare un dato muro: quanti giorni v' impiegheranno lavorando 11 ore al giorno? Minore è il numero delle ore e più giorni vi bisogneranno per fabbricare un dato muro; quindi questo problema dipende da una regola del tre inversa; indicando con x_2 l' incognita, avremo

(2) $$14 : 11 :: x_2 : x_1 .$$

3°. Se 57 operai lavorando 11 ore al giorno hanno impiegato x_2 giorni per fabbricare un muro alto 7 braccia, quanti giorni v' impiegheranno per fabbricare un muro alto 9 braccia? Più alto è il muro e più giorni vi vorranno per fabbricarlo; quindi questo problema dipende da una regola del tre diretta, indicando con x_3 l' incognita, avremo

(3) $$9 : 7 :: x_3 : x_2 .$$

4°. Se 57 operai lavorando 11 ore al giorno hanno impiegato x_3 giorni per fabricare un muro alto 9 braccia e lungo 163 braccia; quanti giorni v' impiegheranno per fabbricare un muro alto 9 braccia e lungo 170 braccia? Il problema dipende da una regola del tre diretta e indicando con x_4 l' incognita si ha

(4) $$170 : 163 :: x_4 : x_3 .$$

5°. Se 57 operai lavorando 11 ore al giorno hanno impiegato x_4 giorni per fabbricare un muro alto 9 braccia, lungo 170 braccia e largo braccia 0,35; quanti giorni v' impiegheranno per fabbricare un muro alto 9 braccia, lungo 170 braccia, largo braccia 0,50? L' incognita è x, e si ha

(5) $$0,50 : 0,35 :: x : x_4 .$$

Moltiplicando termine a termine le proporzioni (1) e (2), poi la nuova proporzione ottenuta e la proporzione (3) e così di seguito fino all'ultima proporzione (5), si otterrà

$$45 \times 14 \times 9 \times 170 \times 0{,}50 : 57 \times 11 \times 7 \times 163 \times 0{,}35 ::$$
$$x_1 \times x_2 \times x_3 \times x_4 \times x : 23 \times x_1 \times x_2 \times x_3 \times x_4,$$

Sopprimendo nel secondo rapporto i fattori comuni x_1, x_2, x_3, x_4, si avrà

$$45 \times 14 \times 9 \times 170 \times 0{,}50 : 57 \times 11 \times 7 \times 163 \times 0{,}35 :: x : 23;$$

da cui

$$x = 23 \frac{45 \times 14 \times 9 \times 170 \times 0{,}50}{57 \times 11 \times 7 \times 163 \times 0{,}35}.$$

ESERCIZI.

I. Se a ciascun soldato della guarnigione di una fortezza si danno 18 once di pane per giorno, la provvisione di farina durerà 150. giorni. Aumentando questa guarnigione sino a 1500 uomini e dando a ciascun soldato la stessa quantità di pane, la farina dura solo 125 giorni. Si domanda quanti uomini conteneva la prima guarnigione, e quanto pane avrebbe dovuto avere ciascun soldato se la farina avesse dovuto bastare lo stesso numero di giorni.

II. Un barrocciaio deve trasportare 3750 libbre a una distanza di 30 miglia, a ragione di Lire 6 13 4, ogni 300 libbre; dopo aver fatto 12 miglia, la strada cattiva l'obbliga a lasciare 836 libbre; dopo 9 miglia prende nuovamente 1540 libbre, che trasporta col resto al luogo fissato. Secondo i patti statuiti, quanto dovrà avere?

III. Un accollatario ha impiegato 60 operai, che lavo-

rando 8 ore per giorno in 12 giorni hanno scavato un fosso lungo 10 tese, largo 5 piedi e la cui profondità è di 7 piedi. Costretto ad assentarsi per 15 giorni, egli conduce seco 10 operai, e dice agli altri di cominciare un nuovo fosso, di 4 piedi di profondità sopra 6 di larghezza, e di lavorare solamente 6 ore per giorno. Qual lunghezza deve avere il fosso al ritorno dell'accollatario?

IV. Tenendo fermi i dati del problema precedente, supponiamo che durante l'assenza dell'accollatario, gli operai credendo di non essere sorvegliati abbian lavorato pochissimo; talchè al suo ritorno il fosso aveva per lunghezza solamente 11 tese, 2 piedi, 4 pollici $\frac{5}{16}$. Giunto il giorno del pagamento, l'accollatario diminuisce a ciascuno operaio 15 soldi per giorno pel minore lavoro che hanno fatto. Quanto avrebbero guadagnato, se avessero lavorato come dovevano? Quante tese di meno di lavoro ha fatto ciascuno? Quanto hanno guadagnato per giorno? Quanto è stata pagata ogni tesa di lavoro?

CAPITOLO XI.

PROBLEMI.

132. Le regole pel calcolo numerico trovate nei capitoli precedenti, si applicano utilmente alla soluzione di varii problemi ([1]) di molta importanza per la pratica. In questo capitolo ci proponiamo di dare un cenno di tali applicazioni.

REGOLA D'INTERESSE. L'*interesse*, o il *frutto* d'una somma o di un *capitale* è il guadagno che ritrae dal suo denaro quello che lo impresta. Questo guadagno dipende dalla somma imprestata, dal tempo durante il quale s'impresta, e da un terzo elemento chiamato *tassa* dell' interesse, ch'è l' interesse del capitale 100 durante un anno.

L'interesse è *semplice* quando la somma imprestata resta la medesima nella durata dell'imprestito; è *composto* quando, al termine di ogni anno, l'interesse si aggiunge al capitale per produrre interesse nell'anno seguente.

Il frutto o l'interesse di un capitale qualunque per un anno si chiama *rendita*.

([1]) Si chiama *problema* una quistione proposta che esige una *soluzione*. Molti dei problemi trattati in questo Capitolo, si risolvono agevolmente applicando le regole del Capitolo precedente: noi li abbiamo risoluti con un metodo detto *di riduzione all' unità* Nel fondo i due metodi non diversificano essenzialmenta l' uno dall' altro; i giovani fanno bene a risolvere i medesimi problemi, trattandoli come regole del tre semplice e composta Nella traduzione dell'Aritmetica di Bertrand, la soluzione di questi problemi è stata da noi derivata da formole generali, le quali permettono di raggiungere più speditamente il risultato. Tuttavia la lettura del presente Capitolo potrà riuscire utile a coloro cui fanno ombra le formole.

Problema I. *Qual è la rendita prodotta da un capitale di 2400 scudi impiegato al 6 per 100?*

Poichè la rendita di 100 scudi è 6 scudi, quella di 1 scudo sarà $\frac{6}{100}$; quindi la rendita di 2400 scudi sarà 2400 volte $\frac{6}{100}$ cioè

$$\frac{2400 \times 6}{100} = 24 \times 6 = 144 \text{ scudi.}$$

Dunque *per trovare la rendita di un dato capitale, basta moltiplicarlo per la centesima parte della tassa: se la tassa è del* 5 *per* 100, *la rendita è* $\frac{1}{20}$ *del capitale.*

Problema II. *Qual è l'interesse di* 7629 *scudi impiegati al* $4\frac{1}{2}$ per 100 *per* 7 *mesi?*

L'interesse di un anno è $\frac{7629 \times 4,5}{100}$. Poichè 7 mesi sono i $\frac{7}{12}$ di un anno, l'interesse di 7 mesi sarà i $\frac{7}{12}$ dell'interesse di un anno, cioè

$$\frac{7629 \times 4,5 \times 7}{100 \times 12} = \frac{2543 \times 0,045 \times 7}{4} = 200,261.$$

Questo problema può risolversi ancora nel seguente modo.

L'interesse di un anno è $\frac{7629 \times 4,5}{100} = 343,305$

Per 6 mesi o la metà di un anno	171, 652
Per 1 mese o la sesta parte di 6 mesi	28, 609
L'interesse di 7 mesi è la somma	200, 261

PROBLEMA III. *Qual è il frutto di* 10000 *scudi per* 19 *mesi* 14 *giorni, la tassa dell' interesse essendo il* 4 *per* 100?

Supponiamo il mese composto sempre di 30 giorni e l'anno di 360 giorni.

19 mesi e 14 giorni equivalgono a 584 giorni.

L'interesse di un anno è $\frac{10000 \times 4}{100}$

di un giorno . . . . $\frac{10000 \times 4}{100 \times 360}$

di 584 giorni . . . . . $\frac{10000 \times 4 \times 584}{100 \times 360} = 648,88.$

Col secondo metodo si procede così:

L'interesse di un anno è . . . . . Scudi	400
Per 6 mesi o la metà di un anno	200
Per 1 mese o la sesta parte di 6 mesi. .	33,33
Per 10 giorni o la terza parte di un mese	11,11
Per 2 giorni o la quinta parte di 10 giorni	2,22
Per 2 giorni	2,22
L'interesse di 19 mesi e 14 giorni è la somma	648,88

PROBLEMA IV. *Qual è il capitale che impiegato alla tassa del* 5 *per* 100, *produca una rendita di* 854 *scudi?*

Per avere 5 scudi di rendita vi bisogna un capitale di 100 scudi; per avere uno scudo di rendita vi bisogna un capitale 5 volte più piccolo, cioè $\frac{100}{5}$; per avere 854 scudi di rendita, vi bisogna un capitale 854 volte maggiore, cioè

$$\frac{100 \times 854}{5} = 20 \times 854 = 17080.$$

Dunque *per calcolare il capitale capace di produrre una rendita data, si moltiplica la rendita per* 100 *e si divide per la tassa dell' interesse. Se la tassa è del* 5 *per* 100, *il capitale è* 20 *volte la rendita.*

Questo stesso problema poteva risolversi ancora in un altro modo, osservando che la rendita di un capitale qualunque è uguale all' interesse di uno scudo moltiplicato pel capitale; quindi per ottenere il capitale basta dividere la rendita per l' interesse di uno scudo. Nell' esempio attuale l' interesse di uno scudo è $\frac{5}{100}$, la rendita è 854 scudi, laonde il capitale corrispondente è dato da

$$854 : \frac{5}{100} = \frac{854 \times 100}{5} = 17080.$$

Problema V. *Qual è il capitale che impiegato alla tassa del* $4\frac{1}{2}$ *per* 100 *dia un frutto di* 150 *scudi in* 5 *mesi e* 13 *giorni?*

5 mesi e 13 giorni equivalgono a 163 giorni.

Uno scudo in un anno produce il frutto $\frac{4,5}{100}$, in un giorno $\frac{4,5}{100 \times 360}$, in 163 giorni $\frac{4,5 \times 163}{100 \times 360}$. L' interesse di un capitale qualunque, per lo stesso tempo, è uguale all' interesse di uno scudo moltiplicato per questo capitale; quindi si otterrà il capitale cercato dividendo 150 scudi per l' interesse di uno scudo, cioè

$$150 : \frac{4,5 \times 163}{100 \times 360} = \frac{150 \times 100 \times 360}{4,5 \times 163} = \frac{1200000}{163} = 7361,96$$

Problema VI. *A qual tassa bisogna impiegare un*

capitale di 4000 *scudi perchè produca una rendita di* 220 *scudi?*

Cercare la tassa dell'interesse, significa cercare il frutto di 100 scudi in un anno: ora

il frutto di 4000 scudi è . . . . 220 scudi

il frutto di 1 scudo . . . . . $\frac{220}{4000}$

il frutto di 100 scudi . . . . . $\frac{220 \times 100}{4000} = 5,5.$

Dunque bisogna impiegare il capitale alla tassa del $5\frac{1}{2}$.

Quindi *per calcolare la tassa dell'interesse si moltiplica la rendita per* 100 *e il prodotto si divide pel capitale.*

Problema VII. *Un capitale di* 6500 *scudi ha dato un frutto di* 180 *scudi in* 9 *mesi e* 24 *giorni; a qual tassa è stato impiegato?*

9 mesi e 24 giorni equivalgono a 294 giorni.
Il frutto di 6500 scudi in 294 giorni è 180

idem. in 1 giorno è $\frac{180}{294}$

idem. in 1 anno è $\frac{180 \times 360}{294}$

il frutto di 1 scudo in 1 anno è $\frac{180 \times 360}{294 \times 6500}$

idem di 100 scudi in 1 anno è $\frac{180 \times 360 \times 100}{294 \times 6500} = 3,39$

Problema VIII. *Per quanto tempo bisogna impie-*

gare un capitale di 2450 *scudi, al* 6 *per* 100, *perchè produca scudi* 211,52 *d' interesse?*

il frutto di 1 scudo in 1 anno è $\frac{6}{100}$

idem. di 2450 scudi in 1 anno è $\frac{6 \times 2450}{100}$

idem. in 1 giorno è $\frac{6 \times 2450}{100 \times 360}$

Il numero di giorni che dev' essere impiegato il capitale 2450 affinchè produca l'interesse di scudi 211,52 si troverà dividendo 211,52 per l'interesse di un giorno; quindi esso è uguale a

$$211{,}52 : \frac{6 \times 2450}{100 \times 360} = \frac{211{,}52 \times 100 \times 360}{6 \times 2450} = 17 \text{ mesi } 8 \text{ giorni.}$$

133. Regola di sconto. Quando si vuole affrettare l'epoca del pagamento di una somma, si subisce una perdita che si chiama *sconto*. Vi ha due specie di sconti; lo sconto *all' infuori* e lo sconto *al di dentro.*

Nello sconto all' infuori, la tassa dello sconto è la perdita che si fa subire ad una cambiale di 100 scudi pagabile dopo un anno. Laonde se la tassa dello sconto è di 4 per 100 per anno, il banchiere farà subire a una cambiale di 100 scudi pagabile dopo un anno una perdita di 4 scudi; cioè pagherà 96 scudi contanti.

Problema. Una cambiale di 3780 lire *scade* fra 90 giorni, la tassa dello sconto essendo del 6 per 100; quale sarà lo sconto all' infuori, se si vuol esser pagati immediatamente?

Sconto di 100 lire per un anno 6

idem. 1 lira. . . . . . . $\frac{6}{100}$

idem 3780 idem . . . . . . $\frac{6 \times 3780}{100}$

idem 3780 lire per 1 giorno $\frac{6 \times 3780}{100 \times 360}$

idem idem per 90 giorni $\frac{6 \times 3780 \times 90}{100 \times 360} = 56,70$

Il banchiere farà subire alla cambiale una perdita di lire 56,70; cioè pagherà lire 3723,30 invece di 3780.

Quindi *per trovare lo sconto all' infuori, si procede come se si calcolasse l' interesse della somma scritta sulla cambiale dal momento attuale sino alla scadenza.*

Nello sconto al di dentro, si cerca il valore attuale della cambiale, cioè la somma che, aumentata dei suoi interessi, dal momento che si considera sino alla scadenza, eguagli la somma scritta sulla cambiale; la differenza tra queste due somme è lo sconto al di dentro. Così, se la tassa dell' interesse è del 6 per 100, una cambiale di 106 lire pagabile fra un anno, vale ora 100 lire: lo sconto al di dentro è 6 lire. Una cambiale di 100 lire, pagabile fra un anno, vale ora 94,34; quindi per questa cambiale di 100 lire, lo sconto al di dentro è 5,66.

Problema I. Qual è lo sconto al di dentro di una cambiale di 700 lire che scade fra 7 mesi, la tassa dell' interesse essendo del 5 per 100?

Cerchiamo il valore attuale della cambiale, che in-

dichiamo con x:

1 lira in 210 giorni produce un interesse di $\frac{5 \times 210}{100 \times 360}$

1 lira dopo 210 giorni vale dunque $1 + \frac{5 \times 210}{100 \times 360} = \frac{3705}{3600} = \frac{247}{240}$

x lire dopo 210 giorni valgono $\frac{247}{240} \times x$.

Questo prodotto dev' essere eguale a 700; quindi

$$x = 700 : \frac{247}{240} = \frac{700 \times 240}{247} = 680{,}16$$

Invece della cambiale si riceveranno lire 680,16; lo sconto al di dentro è 19,84.

Dunque *per trovare lo sconto al di dentro, si cerca il valore attuale della cambiale, dividendo il suo valore nominale per l' unità aumentata degl' interessi di un franco per il tempo indicato, e si toglie il valore attuale dal valore nominale.*

Osservazione. Da questa regola si deduce che per ottenere ciò che diventa un capitale dopo un dato tempo, bisogna moltiplicare questo capitale per l' unità aumentata degli interessi corrispondenti al tempo, durante il quale il capitale è stato impiegato.

Problema II. Ad una cambiale di 2000 lire, da pagarsi fra 10 mesi, se ne vuol sostituire un' altra da pagarsi fra 6 mesi. Quale dev' essere il valore nominale di quest' ultima, la tassa dell' interesse essendo di 5,75 per 100 per anno?

$$1 \text{ lira dopo } 4 \text{ mesi vale } 1 + \frac{5{,}75 \times 4}{100 \times 12} = \frac{1223}{1200}.$$

Supponiamo scorsi i primi 6 mesi; la quistione si

riduce a calcolare il valore attuale della cambiale di 2000 lire che scade fra 4 mesi. Secondo la regola precedente dobbiamo dividere 2000 pel valore di 1 lira alla fine di 4 mesi cioè per $\frac{1223}{1200}$; si ha

$$2000 : \frac{1223}{1200} = \frac{2000 \times 1200}{1223} = \frac{2400000}{1223} = 1962,38.$$

PROBLEMA III. Un negoziante è debitore di una somma di 3000 lire e vorrebbe pagarla con tre cambiali eguali; la prima scade fra 4 mesi, la seconda fra 8 mesi, la terza fra un anno. Quale dev' essere il valore di ciascuna cambiale, la tassa dell' interesse essendo 6 per 100?

Bisogna calcolare il valore nominale in modo che il valore attuale delle tre cambiali sia eguale alla somma dovuta.

Suppongo che questo valore nominale sia di 1 lira, e cerco il valore attuale delle tre cambiali.

Il valore attuale della 1ª camb. è $1 : (1 + \frac{6 \times 4}{100 \times 12}) = \frac{50}{51}$,

quello della 2ª . . . . $1 : (1 + \frac{6 \times 8}{100 \times 12}) = \frac{50}{52}$,

quello della 3ª . . . . $1 : (1 + \frac{6}{100}) = \frac{50}{53}$.

Il valore attuale delle tre cambiali di 1 lira è la somma $\frac{405550}{140556}$.

Se le tre cambiali fossero di 2 lire, il loro valore attuale sarebbe doppio. In breve, il valore attuale di tre cambiali eguali, alle scadenze indicate, pareggia il va-

lore attuale delle tre cambiali di una lira, moltiplicato pel valore nominale. Dunque si otterrà il valore nominale cercato dividendo la somma dovuta per $\frac{405550}{140556}$, ciò che dà

$$\frac{3000 \times 140556}{405550} = 1039,74.$$

134. Interessi composti. Una somma dicesi posta ad *interessi composti* o a *moltiplico* quando è stabilito che gl'interessi che *maturano* alla fine di ogni anno si aggiungano al capitale e producano insieme con esso il frutto dell'anno seguente, e così per più anni successivi sino alla restituzione del capitale con tutti gl'interessi ed interessi d'interessi riuniti.

Problema I. Calcolare ciò che diventano 2450 scudi posti a interessi composti per 4 anni, alla tassa del 6 per 100.

Alla fine del primo anno il valore del capitale unito agl'interessi sarà $2450 \times 1,06$ (133); siccome questa somma deve considerarsi come un nuovo capitale fruttifero alla stessa ragione del 6 per 100, alla fine del secondo anno il valore di un tal capitale unito agl'interessi sarà $2450 \times 1,06 \times 1,06$. Similmente questo terzo capitale unito agl'interessi diverrà alla fine del terzo anno $2450 \times 1,06 \times 1,06 \times 1,06$, e quest'ultimo capitale insieme col suo frutto ascenderà alla fine del quarto anno a

$$2450 \times 1,06 \times 1,06 \times 1,06 \times 1,06 = 3093,07.$$

Se gl'interessi dovessero cumularsi sul capitale in un periodo di tempo diverso dall'anno, in 6 mesi per esempio, il calcolo procederebbe nel modo stesso,

colla sola differenza che invece di moltiplicare il capitale per l'unità aumentata di 0,06, bisognerà moltiplicarlo per l'unità aumentata di 0,03, ch'è il rapporto fra la tassa per 6 mesi e 100; quindi il capitale aumentato dopo 4 anni, ossia dopo 8 *periodi* di sei mesi, sarebbe

$$2450 \times (1,03)^8 = 3103,59 .$$

Dunque, *per trovare il valore che acquista una somma data ad interessi composti alla fine di un certo tempo, deve moltiplicarsi il capitale proposto per una potenza dell'unità aumentata della centesima parte della tassa dell'interesse, corrispondente al periodo stabilito per la cumulazione degl'interessi, il cui esponente sia eguale al numero dei periodi contenuti nel dato tempo.*

PROBLEMA II. *Un negoziante deve pagare* 2000 *scudi dopo tre anni; si domanda che somma dovrebbe impiegare a moltiplico, coll'interesse al* 6 *per* 100 *l'anno da aggiungersi al capitale in ogni nove mesi, affinchè in tre anni potesse cumulare i* 2000 *scudi che gli bisognano?*

1 scudo in 270 giorni produce un interesse di $\frac{6 \times 270}{100 \times 360} = 0,045$.

Quindi secondo la regola precedente bisogna moltiplicare la somma x da darsi a moltiplico per $(1,045)^4$, poichè tre anni contengono 4 periodi di 9 mesi; e si ha

$$x \times (1,045)^4.$$

Ma dopo tre anni il capitale impiegato deve aver raggiunto il termine stabilito di 2000 scudi, dunque

quel prodotto dovrà essere eguale a 2000, e per conseguenza

$$x = \frac{2000}{(1,045)^4} = 1677,12.$$

135. Regola di società. La regola di società ha per oggetto di dividere il guadagno o la perdita di una società commerciale fra le persone che vi hanno preso parte e proporzionalmente ai loro dritti rispettivi.

Problema I. *Tre negozianti hanno riunito i loro capitali in commercio; il primo ha posto* 12000 *lire, il secondo* 10500 *lire, il terzo* 7840 *lire. Al termine dell' anno il guadagno totale è stato di* 6375 *lire. Dividere questo guadagno proporzionalmente ai capitali posti in società.*

Il capitale sociale è 30340 lire. Questo capitale ha dato un guadagno di 6375 lire; quindi il capitale di 1 lira darebbe per guadagno $\frac{6375}{30340}$. Laonde per avere la parte di ciascun associato, basta moltiplicare il benefizio di 1 lira per la somma corrispondente, si ha:

$$\text{Parte del } 1^{\circ} \ldots \quad \frac{6375 \times 12000}{30340} = 2521,42$$

$$\text{— del } 2^{\circ} \ldots \quad \frac{6375 \times 10500}{30340} = 2206,25$$

$$\text{— del } 3^{\circ} \ldots \quad \frac{6375 \times 7840}{30340} = 1647,33$$

$$6375,00$$

La prova di quest'operazione si ottiene sommando le parti; deve trovarsi il guadagno totale.

Problema II. *Tre negozianti hanno fatto un guadagno di* 1250 *lire. Il primo ha posto in società*

3000 lire per 6 mesi, il secondo 4000 lire per 8 mesi, e il terzo 2000 lire per 10 mesi. Dividere il guadagno proporzionalmente al tempo e a ciascun capitale posto in società.

Il primo ha posto 3000 lire per 6 mesi, lo che equivale a porre $3000 \times 6 = 18000$ lire per un mese.

Il secondo ha posto 4000 lire per 8 mesi, lo che equivale a porre $4000 \times 8 = 32000$ lire per un mese.

Il terzo ha posto 2000 lire per 10 mesi, lo che equivale a porre $2000 \times 10 = 20000$ lire per un mese.

Il quesito è quindi ridotto al problema precedente. Si può supporre che i tre associati abbiano posto nella società, il primo 18000 lire, il secondo 32000 lire, e il terzo 20000 lire, durante lo stesso tempo: bisogna dividere il guadagno proporzionalmente a questi capitali.

$$\text{Parte del } 1^{\circ} \ldots \quad \frac{1250 \times 18000}{70000} = 321,43$$

$$\text{— del } 2^{\circ} \ldots \quad \frac{1250 \times 32000}{70000} = 571,43$$

$$\text{— del } 3^{\circ} \ldots \quad \frac{1250 \times 20000}{70000} = 357,14$$

$$1250,00$$

ESERCIZI

I. Quanto tempo bisogna lasciare a interessi composti la somma di 3600 lire alla tassa del 5 per 100, perchè produca un frutto uguale a quello che ha prodotto un'altra somma di 5000 lire alla tassa del 5 per 100 durante 12 anni?

II. Qual capitale impiegato a interessi composti per 15

anni alla tassa del 4 per 100, potrà produrre tanto quanto 4500 lire alla tassa del 5 per 100 alla fine di 9 anni?

III. Una somma di 7963 lire è stata posta a interessi composti durante 10 anni alla tassa del 5 per 100; alla fine del quinto anno il creditore prende 576 lire, alla fine dell'ottavo anno ne prende ancora 498: che somma resta al termine di dieci anni?

IV. Una persona possiede una somma di 100000 lire che ha posta a interessi composti alla tassa del 5 per 100, ma essa ha bisogno di 6000 lire ogni anno pel suo mantenimento, ed è quindi obbligata a prendere ciascun anno qualche cosa sul suo capitale: in quanto tempo avrà esaurito tutto questo capitale?

V. Una persona prende ad imprestito una somma di 600 lire per 6 anni e dà invece una cambiale di 800 lire: a qual tassa ha egli preso ad imprestito?

VI. Una persona lascia morendo quattro eredi, e dispone che la sua proprietà di 45000 scudi sia divisa fra essi in modo che il primo ne abbia la metà, il secondo la terza parte, il terzo due quinti, ed il quarto un sesto: si domanda quanto spetta a ciascuno?

1° Trattare delle regole di interessi con le proporzioni — 3
2° Della partizione in parti proporzionali 2
3° Regola di società — 2
4° Regola congiunta — 2
5° Regola di alligazione — 3
6° Frazioni decim. periodiche — 2
7° Radice quadrata — 3
8° Radice cubica — 3
9° Sistema metrico — 4

18
4
22

CAPITOLO XII.

SISTEMA METRICO.

136. Nel capitolo sesto abbiamo veduto che per misurare una grandezza, bisogna riferirla ad un'altra della stessa specie che si chiama *unità;* ora l'insieme delle unità che servono alla misura delle principali grandezze, quali *lunghezze, superficie, volumi* e *pesi,* costituisce un *sistema di misure.* Il sistema di misure legali adottato in tutta l'Italia è il sistema metrico francese, del quale faremo una breve esposizione.

Misure di lunghezza.

137. Per unità di lunghezza si è presa la diecimilionesima parte della distanza del polo all'equatore terrestre, misurata sulla superficie dell'oceano, e a questa unità si è dato il nome di *metro.*

Le parti aliquote del metro che più comunemente si adoperano sono: il *decimetro,* decima parte del metro; il *centimetro,* decima parte del decimetro; il *millimetro,* decima parte del centimetro.

I multipli del metro sono: il *decametro,* equivalente a dieci metri; l'*ettometro,* equivalente a dieci decametri; il *chilometro,* equivalente a dieci ettometri; il *miriametro,* equivalente a dieci chilometri.

Le misure itinerarie sono il miriametro e il chilometro. Nell'agrimensura si adopera una catena lunga un decametro.

Misure di superficie.

138. Per unità di superficie si prendono i quadrati che hanno per lato le differenti unità di lunghezza.

Quindi le unità di superficie sono:

Il *millimetro quadrato*, che è un quadrato che ha per lato un millimetro; il *centimetro quadrato*, il *decimetro quadrato*, il *metro quadrato*, che è l'unità principale, il *decametro quadrato*, l'*ettometro quadrato*, il *chilometro quadrato*, e il *miriametro quadrato*.

Ciascuna di queste unità contiene 100 volte la precedente. Così p. e., se dividiamo un metro in dieci parti eguali e sopra ciascuna di queste parti costruiamo un quadrato, verremo a formare una superficie che ha 1 metro di lunghezza sopra $0^m,1$ di larghezza, e che è la decima parte di un metro quadrato; quindi il metro quadrato equivale a 100 decimetri quadrati.

Nell'agrimensura si adoperano il metro quadrato, il decametro quadrato e l'ettometro quadrato sotto i nomi rispettivi di *centiara*, *ara* e *ettara*.

Misure di volume e di capacità.

139. Per unità di volume si prendono i cubi (corpi terminati da sei quadrati), che hanno per costole le diverse unità di lunghezza.

Quindi le unità di volume sono:

Il *millimetro cubo*, che è un cubo che ha per costola un millimetro e per faccia un millimetro quadrato; il *centimetro cubo*, il *decimetro cubo*, il *metro cubo*, che è l'unità principale ec.

Ciascuna di queste unità contiene 1000 volte la precedente. Così p. e., se una delle facce di un metro cu-

bo, che è 1 metro quadrato, si decompone in 100 decimetri quadrati, e se sopra ciascuno di questi decimetri quadrati si costruisce un cubo, verremo a riempire uno spazio che ha per base un metro quadrato e per altezza un decimetro; questo spazio è la decima parte del metro cubo, il quale per conseguenza equivale a 1000 decimetri cubi.

Il metro cubo prende il nome di *stero* quando serve per la misura del legname.

140. Per la misura dei liquidi si prende per unità il *litro,* che equivale a un decimetro cubo. Le parti aliquote del litro sono: il *decilitro,* decima parte di un litro; il *centilitro,* decima parte di un decilitro. I multipli del litro sono: il *decalitro,* che equivale a dieci litri; l'*ettolitro,* che equivale a dieci decalitri; il *chilolitro,* che equivale a dieci ettolitri.

Misure di pesi.

141. L'unità di peso è il *grammo,* che equivale al peso, nel vuoto, di un centimetro cubo di acqua distillata alla temperatura di 4 gradi centigradi.

Le parti aliquote del grammo sono: il *decigrammo,* decima parte del grammo; il *centigrammo,* decima parte del decigrammo; il *milligrammo,* decima parte del centigrammo.

I multipli del grammo sono: il *decagrammo,* che equivale a dieci grammi; l'*ettogrammo,* che equivale a dieci decagrammi; il *chilogrammo* che equivale a dieci ettogrammi; il *quintale metrico,* che equivale a cento chilogrammi; la *tonnellata,* che equivale a mille chilogrammi.

Il chilogrammo è il peso di un litro di acqua di-

stillata alla temperatura di 4 gradi centigradi; e la tonnellata è il peso di un metro cubo di acqua.

Monete.

142. L' unità monetaria è la *lira italiana*. La lira è un pezzo di argento che pesa 5 grammi, dei quali $4^{g},50$ sono argento puro, e $0^{g},50$ sono di rame.

La lira italiana si divide in dieci decimi, e il decimo in dieci *centesimi*. I multipli della lira non hanno ricevuto nomi particolari.

Calcolo delle grandezze riferite alle misure metriche.

143. Poichè i multipli e le parti aliquote di ciascuna specie di unità principale sono sottoposti alla legge decimale, ne segue che si può immediatamente riferire all' unità principale una grandezza primitivamente misurata con una o più unità qualunque; ed allora la grandezza sarà rappresentata da un numero intero o decimale.

Esempii. — 1° Una lunghezza che contiene 5 ettometri, 8 metri, 4 decimetri e 7 millimetri, riferita all' unità principale è rappresentata da $508^{m},407$.

2° Una superficie che contiene 4 ettare, 73 are, 52 decimetri quadrati e 9 centimetri quadrati, è rappresentata da $47300^{mq},5209$.

3° Un volume che contiene 136 metri cubi, 7 decimetri cubi e 47 centimetri cubi, è rappresentato da $136^{mc},007047$.

4° Un volume che contiene 15 ettolitri, 9 litri, 6 decilitri e 4 centilitri, è rappresentato da $1509^{lit},64$.

144. Reciprocamente, se una grandezza è riferita all' unità principale, il numero che la rappresenta indica altresì quante unità di ciascuna specie sono contenute in questa grandezza.

1° Se si tratta di una lunghezza riferita al metro, le cifre della parte decimale del numero che rappresenta questa lunghezza esprimono rispettivamente decimetri, centimetri, ec.; le cifre della parte intera, procedendo da destra verso sinistra, esprimono metri, decametri, ettometri ec. Così la lunghezza rappresentata dal numero $537^{m},64$, contiene 5 ettometri, 3 decametri, 7 metri, 6 decimetri e 4 centimetri.

2° Se il numero dato rappresenta una superficie riferita al metro quadrato, immaginiamo questo numero decomposto in classi di due cifre, a cominciare dalla virgola, procedendo verso la destra e verso la sinistra. Le classi della parte decimale esprimono decimetri quadrati, centimetri quadrati, ec.; le classi della parte intera, procedendo da destra verso sinistra, esprimono metri quadrati, decametri quadrati, ec. Se l'ultima classe a destra della parte decimale contiene una sola cifra, bisogna completarla scrivendo uno zero. Così la superficie rappresentata dal numero $57843^{mq},29573$, contiene 5 ettometri quadrati, 78 decametri quadrati, 43 metri quadrati, 29 decimetri quadrati, 57 centimetri quadrati e 30 millimetri quadrati.

3° Se il numero dato rappresenta un volume riferito al metro cubo, immaginiamo decomposto questo numero in classi di tre cifre a cominciare dalla virgola, procedendo verso la destra e verso la sinistra. Le classi della parte decimale esprimono decimetri cubi, centimetri cubi, ec.; le classi della parte intera, procedendo dalla destra verso la sinistra, esprimono metri cubi, decametri cubi, ec. Se l'ultima classe a destra della parte decimale ha meno di tre cifre, bisognerà completarla con zeri. Così un volume rappresentato dal numero $57^{mc},6340275$, contiene 57 metri cubi, 634 decimetri cubi, 27 centimetri cubi e 500 millimetri cubi.

4° Se un volume è riferito al litro, o un peso al grammo, ciascuna delle cifre del numero che rappresenta questo volume o questo peso esprime unità dell'ordine immediatamente inferiore a quello della cifra precedente.

145. Se una grandezza è riferita all'unità principale o ad un'altra unità qualunque, per riferirla ad un'altra unità minore o maggiore, dovremo moltiplicare o dividere il numero che rappresenta la grandezza che si considera per la potenza di 10, che esprime quante volte l'unità di ordine più elevato contiene l'altra.

Esempii. — 1° — $53^{m},7954$ equivalgono a centimetri 5379,54 e a decametri 5,37954, poichè 1 metro è uguale a 10^{2} centimetri, e un decametro è uguale a 10 metri.

2° Il numero $347^{mq},63954$ equivale a centimetri quadrati 3476395,4, e a decametri quadrati 3,4763954, poichè 1 metro quadrato è uguale a 10^{4} centimetri quadrati e 1 decametro quadrato è uguale a 10^{2} metri quadrati.

ESERCIZI.

1° Supponiamo di aver saldate insieme, estremità con estremità, tre lamine, una di ferro, una di rame e l'altra di piombo, che abbiano a 0 grado le lunghezze rispettive di $4^{m},572$, $2^{m},794$, $6^{m},238$. Si vuol sapere la lunghezza totale della lamina a 100 gradi, ammesso che quando la temperatura s'inalza da 0 a 100 gradi, una lamina di ferro di 1 metro aumenta di $0^{m},00125833$, una lamina di rame di 1 metro aumenta di 0 ,00187500, e una lamina di piombo di 1 metro aumenta di $0^{m}00286667$.

2° Il peso di un decimetro cubo di ferro è di 7^ch^,788 e 1 litro di aria pesa 1^gr^,293187; qual'è il peso di aria spostato da 314^ch^,159 di ferro?

3° Un decimetro cubo di oro pesa 19^ch^,26 e il chilogrammo di oro vale 3100 lire italiane; una lamina di oro del valore di 17532 lire italiane quanti centimetri cubi contiene?

FINE.

INDICE.

AVVERTENZA. . . . . Pag. III

CAPITOLO I. Nozioni preliminari. 1
— II. Addizione e Sottrazione. 9
— III. Moltiplicazione. 19
— IV. Divisione. 29
— V. Divisori dei numeri. — Numeri primi. 40
— VI. Frazioni. 48
— VII. Numeri decimali. 68
— VIII. Numeri complessi. 79
— IX. Rapporti e proporzioni. 96
— X. Regole del tre. 105
— XI. Problemi. 116
— XII. Sistema metrico. 130